Eine Erweiterung der Sätze vom Erdös-Renyi-Typ auf ungerichtete, vollständig indizierte Zufallsmultigraphen

Inaugural -Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Erhard Godehardt

aus Leinefelde

Düsseldorf 1980

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543910_0063

Eine Erweiterung der Sätze vom Erdös-Renyi-Typ auf ungerichtete, vollständig indizierte Zufallsmultigraphen

Inaugural -Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Erhard Godehardt

aus Leinefelde

Düsseldorf 1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan: Prof. Dr. J. Uhlenbusch
1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Klinger
2. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Krauth

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1980

Inhaltsverzeichnis

Seite

0. Symbole, Erläuterungen 1

1. Einleitung und Grundbegriffe 3
   1.1. Definitionen und Bemerkungen 5
   1.2. Gliederung, Überblick über den Inhalt der vorliegenden Arbeit 10

2. Das Wahrscheinlichkeitsmodell für ungerichtete, vollständig indizierte Zufallsmultigraphen 12
   2.1. Definition des Wahrscheinlichkeitsraumes 12
   2.2. Definition der Zufallsvariablen 14
   2.3. Eine Analogie der Begriffe "s-gesättigte Belegung" in Multigraphen und "Kante" in einfachen Graphen 17

3. Einige bekannte Modelle und Ergebnisse 18
   3.1. Bekannte Wahrscheinlichkeitsmodelle 18
   3.2. Einige Ergebnisse aus der Theorie der Zufallsgraphen 21

4. Wahrscheinlichkeitstheorie der Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ 28
   4.1. Vorbereitungen für die Theorie dieses Kapitels 29
   4.2. Die Verteilung der Zufallsvariablen 33
   "Anzahl der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$" bzw.
   "Anzahl der Knoten, die mit x_i s-verbunden sind"
   4.3. Die Eigenschaft C_k^s 37
   4.4. Ergebnisse für die Zufallsvariable 41
   "Anzahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$"
   4.4.1. Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen 41
   "Anzahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$"
   4.4.2. Der Fall m=1: Die Verteilung der Zufallsvariablen 44
   "Zahl der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$"
   4.5. Ergebnisse für den Sonderfall s=1 46
   4.6. Ergebnisse für die Sonderfälle s=2 und s=t 50
   4.7. Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels 52

Seite

5. Grenzwertsätze für Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ mit $n \to \infty$ und $N=N(n)$ 56
   5.1. Hilfsmittel für die weitere Theorie 58
   5.2. Theorie für den Sonderfall $s=1$ 64
      5.2.1. Die Kantenfunktionen $N_1(n)$ 64
      5.2.2. Die Grenzverteilung der Zufallsvariablen "Zahl der 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$" für $n \to \infty$ 65
      5.2.3. Der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ 1-zusammenhängend ist, und die Grenzverteilung der Zahl der 1-Komponenten 67
      5.2.4. Bemerkungen zur Wahl von $N_1(n)$ 72
   5.3. Theorie für allgemeines s 76
      5.3.1. Die Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$ 76
      5.3.2. Die Grenzverteilung der Zufallsvariablen "Zahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$" für $n \to \infty$ 81
      5.3.3. Der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ s-zusammenhängend ist, und die Grenzverteilung der Zahl der s-Komponenten 85
   5.4. Bemerkungen zu den Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$ und Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels 87

Tabellen 92

Zusammenfassung 108

Literatur 110
   Zitierte Literatur 111
   Bibliographie 114

0. Symbole, Erläuterungen

$:=$	definitionsgemäß gleich
$:\Leftrightarrow$	definitionsgemäß äquivalent
$\Leftrightarrow$	äquivalent
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
$A \subset B$	A ist Teilmenge der Menge B
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge der Menge A
$\|A\|$	Anzahl der Elemente von A
$A \cup B$	Vereinigungsmenge der Mengen A und B
$A \cap B$	Schnittmenge der Mengen A und B
$\overline{A}$	Komplementärmenge der Menge A
$x \in A$	x ist Element der Menge A
$x \notin A$	x ist nicht Element der Menge A
$\{a,b,\ldots\}$	Menge mit den Elementen a,b,…
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null
(a_n)	Folge der Zahlen $a_1, a_2, \ldots$
$\uparrow$	konvergiert monoton wachsend gegen
$\downarrow$	konvergiert monoton fallend gegen
$\to$	konvergiert gegen
$\lim_{n\to\infty}$	Grenzwert für $n \to \infty$
$\liminf_{n\to\infty}$	Limes inferior für $n \to \infty$
$\limsup_{n\to\infty}$	Limes superior für $n \to \infty$
$\min\{a,b\}$	Minimum der Zahlen a und b
$\max\{a,b\}$	Maximum der Zahlen a und b
$o(f(n))$	Landau - Symbol: für $f(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $g(n) = o(f(n)) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$
$O(f(n))$	Landau - Symbol: für $f(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $g(n) = O(f(n)) :\Leftrightarrow$ g(n)/f(n) ist beschränkt

$\sim$ asymptotisch gleich:
für $f(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $g(n) \sim f(n) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$

$[x]$ größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, x reell

$\{x\}$ kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist, x reell

(a,b) offenes Intervall zwischen den reellen Zahlen a und b

e^x, $exp(x)$ Exponentialfunktion

$\ell n\, x$ natürlicher Logarithmus von x

$n!$ n Fakultät:

$$n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ 0! := 1$$

$n^{[m]}$ m-te Faktorielle von n:
$n^{[m]} := n!/(n-m)!$ für $n \geq m$, $n,m \in \mathbb{N}_0$, $n^{[m]} := 0$ sonst

$\binom{n}{m}$ Binomialkoeffizient n über m:
$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!} = n^{[m]}/m!$ für $n \geq m$, $n,m \in \mathbb{N}_0$, $\binom{n}{m} := 0$ sonst

$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ Multinomialkoeffizient:
$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} := \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}$ für $n_1+\ldots+n_k=n$, $n_\kappa \in \mathbb{N}_0$, $\kappa=1,\ldots,k$,
$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} := 0$ sonst; insbesondere ist $\binom{n}{m,n-m} = \binom{n}{m}$.

(Ω,A,P) Wahrscheinlichkeitsraum

$T,U,\ldots,Z$ Zufallsvariablen auf (Ω,A,P)

$EX, E(X)$ Erwartungswert der Zufallsvariablen X

$E(X|y)$ bedingter Erwartungswert der Zufallsvariablen X unter der Bedingung y

$EE(X|Y)$ Erwartungswert bzgl. der Zufallsvariablen Y des bedingten Erwartungswertes von X

$Cov(X,Y)$ Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y

$Var\ X$ Varianz der Zufallsvariablen X

$P(\lambda)$ Poissonverteilung mit dem Parameter λ

$|x|$ Betrag der Zahl x

$\square$ Markierung am Ende eines Beweises

Ist in Summen der Wert der oberen Grenze für den Summationsindex kleiner als die untere Grenze, so wird der Wert der Summe zu Null gesetzt. Entsprechend wird in einem Produkt der Wert des Produktes zu 1 gesetzt.

1. Einleitung und Grundbegriffe

Die Graphentheorie als ein Teilgebiet der Mathematik hat in den letzten Jahren eine stürmische Entwicklung durchlaufen. Daneben findet sie immer mehr Anwendung in anderen - vor allem empirischen - Wissenschaften. Denn Graphen sind wegen ihrer intuitiv klaren Darstellbarkeit als Diagramme sehr nützliche Hilfsmittel zur Modellbildung, etwa in der Physik (z.B. elektrische Netzwerke), der Organischen Chemie, den Ingenieurwissenschaften und der Psychologie und Soziologie (Soziogramme), der Biologie und der Medizin (Neuronennetze).

Tatsächlich kann jedes System, auf dem eine binäre Relation definiert ist, als Graph dargestellt werden. In den in Uhlenbeck (1960) dargestellten Untersuchungen über Statistische Mechanik werden z.B. Moleküle als "Knoten" eines Graphen aufgefaßt, und zwei Knoten werden genau dann durch eine "Kante" miteinander verbunden, wenn die ihnen zugeordneten Moleküle so nah benachbart sind, daß sie in physikalischer Wechselwirkung zueinander stehen. Einen Überblick über verschiedene Anwendungen der Graphentheorie geben Laue (1971) und Hein (1977).

Die Theorie der Zufallsgraphen ist ein Teilgebiet der kombinatorischen Graphentheorie. Es gibt eine Vielzahl von theoretischen Arbeiten, in denen das finite oder asymptotische Verhalten von Zufallsgraphen - unter Zugrundelegung verschiedener Wahrscheinlichkeitsmodelle - untersucht wird. Der Bereich der kombinatorischen Graphentheorie wird umfassend dargestellt in Erdös und Spencer (1974), sowie in Halder und Heise (1976). An dieser Stelle möchte ich außerdem noch auf die Arbeiten von Yu.D. Burtin, P. Erdös, R.F. Ling, A. Rényi und V.E. Stepanov hinweisen, die im Literaturverzeichnis angegeben sind.

Der kombinatorische Charakter der Zufallsgraphen erlaubt es ebenfalls, Lösungen für Probleme aus dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik anzubieten. Als Beispiel hierzu sei die Clusteranalyse genannt. Man kann ein "Cluster" (d.h. eine Untergruppe) einer gegebenen Population auffassen als eine "Komponente" (d.h. einen bestimmten Teilgraphen) eines Zufallsgraphen und dann nach der "Zufälligkeit"

des Auftretens solcher Komponenten fragen. Eine Theorie hierüber findet man z.B. in L i n g (1971).

Bedingt durch die vielen mathematischen Zugangsmöglichkeiten zur Graphentheorie, vielleicht auch durch die vielen Anwendungsbereiche, gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, den Begriff "Graph" zu präzisieren, z.B. gibt es topologische und mengentheoretische Definitionen. (Letztere sind in der kombinatorischen Graphentheorie die gebräuchlichsten.) Vielfach werden in der Literatur Begriffe wie "Graph", "Multigraph", "Pseudograph" unterschiedlich festgelegt, d.h. der eine Autor versteht dasselbe unter einem Multigraphen, was bei dem anderen als Graph definiert wird.

Deshalb wollen wir im folgenden Paragraphen die für die vorliegende Arbeit notwendigen Begriffe festlegen, wobei der mengentheoretische Zugang zur Graphentheorie gewählt wird. Sprechen wir in dieser Arbeit von Graphen, so meinen wir immer sog. "ungerichtete" Graphen.

1.1. Definitionen und Bemerkungen

Sei G eine nichtleere n-elementige Menge mit den Elementen $x_1,\dots,x_n$. Weiter sei K die Menge aller zweielementigen Teilmengen von G, d.h. $K := \{e_{ij}=\{x_i,x_j\}: x_i,x_j \in G, i<j\}$, und H eine N-elementige Teilmenge von K ($N \in \mathbb{N}_0$, d.h. H darf leer sein). Das Tupel $(G,H) =: \Gamma_{n,N}$ heißt (ungerichteter, indizierter) Graph. Die Elemente aus G werden Knoten des Graphen $\Gamma_{n,N}$ genannt, während man die Elemente von H als Kanten bezeichnet.

Es ist üblich, einen Graphen durch ein Diagramm darzustellen, in dem die Knoten als Punkte und die Kanten als verbindende Linien zwischen den Punkten gezeichnet werden (vgl. Abb. 1.1). Man bezieht sich auf diese Zeichnung, als ob sie der eigentliche Graph sei.

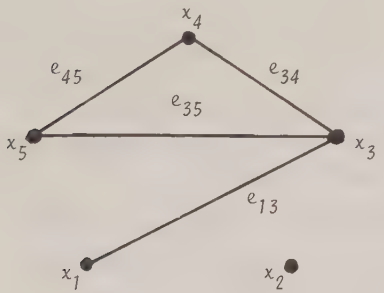


Abb. 1.1. Ein Graph $\Gamma_{5,4} = (G,H)$ mit
$G = \{x_1,\dots,x_5\}$ und $H = \{e_{13},e_{34},e_{35},e_{45}\}$

Nach obiger Definition des Graphen - die in Übereinstimmung mit Harary (1974) gewählt wurde - sind Schlingen verboten, das sind Kanten, die einen Knoten mit sich selbst verbinden. Ebenso darf nur höchstens eine Kante zwischen zwei Knoten liegen.

Im folgenden verallgemeinern wir die Definition des ungerichteten, indizierten Graphen dahingehend, daß wir nicht nur eine, sondern t unterscheidbare Kanten zwischen demselben Knotenpaar zulassen.

Definition 1.1. Seien $t,n \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Seien $G:=\{x_1,\dots,x_n\}$ eine nichtleere Menge und $K := \{e_{ij}=\{x_i,x_j\}: x_i,x_j \in G, i<j\}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von G. Weiter sei die Menge ${}^tK$ definiert durch ${}^tK := K\times\{1,\dots,t\} = \{e_{ij\ell}=\{x_i,x_j,\ell\}: x_i,x_j \in G, i<j, \ell\in\{1,\dots,t\}\}$. Sei H eine N-elementige Teilmenge von ${}^tK$. Dann heißt $\Gamma_{t,n,N} := (G,H)$ ein (ungerichteter, vollständig indizierter) Multigraph. Die Elemente von G heißen Knoten, die Elemente von H Kanten von $\Gamma_{t,n,N}$. Jede Teilmenge $\{e_{ij1},\dots,e_{ijt}\}$ von ${}^tK$ nennen wir Belegung.

Anmerkung 1.1. Auch in dieser Definition sind Schlingen verboten. Man sieht sofort, daß die Definition des "einfachen" ungerichteten, indizierten Graphen zu Beginn dieses Paragraphen äquivalent zu dem Sonderfall t=1 aus Def. 1.1 ist. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird deshalb nicht mehr zwischen $\Gamma_{n,N}$ und $\Gamma_{1,n,N}$ unterschieden.

Anmerkung 1.2. Def. 1.1 entspricht nicht dem, was viele Autoren unter einem Multigraphen verstehen (vgl. z.B. Austin, Fagen, Penney und Riordan (1959) und Harary (1974)). Man kann sich einen ungerichteten, vollständig indizierten Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ entstanden denken durch Übereinanderschichten von t einfachen Graphen Γ_{n,N_ℓ}, deren Knotenmengen übereinstimmen, und für die $N_1+\dots+N_t = N$ gilt.

Der Multigraph in Abb. 1.2 besteht aus t=4 übereinandergeschichteten Graphen. Jeder Knoten ist deshalb mit vier Schichten gezeichnet; je Schicht kann eine Kante zwischen zwei Knoten liegen.

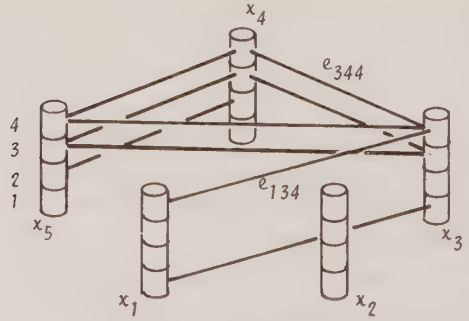


Abb. 1.2. Ein Multigraph $\Gamma_{4,5,9} = (G,H)$ mit
$G = \{x_1,\dots,x_5\}$, $H = \{e_{131},e_{134},e_{343},e_{344},e_{353},e_{354},e_{452},e_{453},e_{454}\}$

In jeder einzelnen dieser Schichten von $\Gamma_{t,n,N}$ können nach Definition maximal $\binom{n}{2}$ Kanten liegen; insgesamt kann die Kantenmenge H also höchstens $t\binom{n}{2}$ Elemente enthalten. Für die nachstehenden Definitionen sei deshalb vereinbart, daß $n,t \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq N \leq t\binom{n}{2}$ gelten soll. Zusätzlich sei noch $s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s \leq t$.

Die nun folgenden Definitionen sind in dieser allgemeinen Form neu. Für den Sonderfall t=s=1 sind sie allerdings bereits in der Graphentheorie üblich (dann natürlich ohne das Präfix).

Definition 1.2. Zwei Knoten x_i und x_j eines Multigraphen $\Gamma_{t,n,N} = (G,H)$ heißen s-verbunden, wenn $|\{e_{ij1},\dots,e_{ijt}\} \cap H| \geq s$ gilt, d.h. wenn zwischen x_i und x_j mindestens s der N Kanten des Multigraphen liegen. Die Belegung $\{e_{ij1},\dots,e_{ijt}\}$ heißt in diesem Fall s-gesättigt.

Definition 1.3. Die Zahl der mit einem Knoten x_i s-verbundenen Knoten heißt s-Grad von x_i. Die Knoten eines vollständig indizierten Multigraphen, deren s-Grad sich zu Null ergibt (die mit keinem Knoten s-verbunden sind), heißen s-isoliert.

Definition 1.4. Eine Folge von k ($k \geq 2$) paarweise verschiedenen Knoten $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ von $\Gamma_{t,n,N}$, bei denen je zwei Knoten $x_{i_\varkappa}$ und $x_{i_{\varkappa+1}}$ ($\varkappa=1,\dots,k-1$) s-verbunden sind, nennen wir s-Pfad (der Größe k).

Definition 1.5. Eine Folge von k ($k \geq 3$) paarweise verschiedenen Knoten $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ eines Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$, bei denen je zwei Knoten $x_{i_\varkappa}$ und $x_{i_{\varkappa+1}}$ ($\varkappa=1,\dots,k-1$) sowie x_{i_k} und x_{i_1} s-verbunden sind, heißt s-Kreis (der Größe k).

In den letzten vier Definitionen wurden Eigenschaften von Knoten eines ungerichteten, vollständig indizierten Multigraphen festgelegt. Im folgenden betrachten wir "Teilmultigraphen" eines solchen gegebenen Multigraphen $\Gamma_{t,n,N} = (G,H)$.

Definition 1.6. Das Tupel $\Gamma^*_{t,m,M} = (G^*,H^*)$ mit $|G^*|=m$ und $|H^*|=M$ heißt Teilmultigraph (oder kurz Teilgraph) von $\Gamma_{t,n,N}$, wenn $G^* \subset G$ gilt und $H^* = H \cap (G^* \times G^* \times \{1,\dots,t\})$. Umgekehrt heißt $\Gamma_{t,n,N}$ Obergraph von $\Gamma_{t,m,M}$. Gilt $m<n$, so sprechen wir von echten Teil- bzw. Obergraphen.

Definition 1.7. Ein Teilgraph $\Gamma^*_{t,m,M}$ ($m \geq 2$) heißt s-zusammenhängend, wenn für je zwei Knoten x,y von $\Gamma^*_{t,m,M}$ ein s-Pfad $x=x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}=y$ existiert, wobei alle $x_{i_\varkappa}$ ($\varkappa=1,2,\dots,k$) ebenfalls Knoten von $\Gamma^*_{t,m,M}$ sind. Ein Teilgraph $\Gamma^*_{t,1,0}$ heißt ebenfalls s-zusammenhängend.

Definition 1.8. Ein s-zusammenhängender Teilgraph $\Gamma^*_{t,m,M}$ ($m \geq 2$), der nicht selbst echter Teilgraph eines bereits s-zusammenhängenden Teilgraphen von $\Gamma_{t,n,N}$ ist, heißt echte s-Komponente (der Größe m) von $\Gamma_{t,n,N}$. s-isolierte Knoten bezeichnen wir als entartete s-Komponenten (der Größe 1). Echte und entartete s-Komponenten fassen wir zusammen unter dem Oberbegriff s-Komponente (d.h. eine s-Komponente ist ein maximaler s-zusammenhängender Teilgraph von $\Gamma_{t,n,N}$).

Definition 1.9. Ein s-zusammenhängender Teilgraph $\Gamma^*_{t,m,M}$ von $\Gamma_{t,n,N}$, dessen Knoten keinen s-Kreis enthalten, heißt s-Baum (der Größe m). Ein s-isolierter Knoten ist ein s-Baum der Größe 1.

Da nach Def. 1.6 ein Teilgraph $\Gamma^*_{t,m,M} = (G^*,H^*)$ eines gegebenen Multigraphen bereits eindeutig durch seine Knotenmenge G^* bestimmt ist, werden in der vorliegenden Arbeit - wie für t=1 allgemein auch in der Literatur üblich - oft die Teilgraphen mit ihren Knotenmengen identifiziert. (Wir nennen z.B. die Knotenmenge $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ in Abb. 1.3 eine 2-Komponente von $\Gamma_{4,11,21}$.) Anhand der folgenden Abb. 1.3 eines Multigraphen $\Gamma_{4,11,21}$ sollen einige der obigen Begriffe erläutert werden.

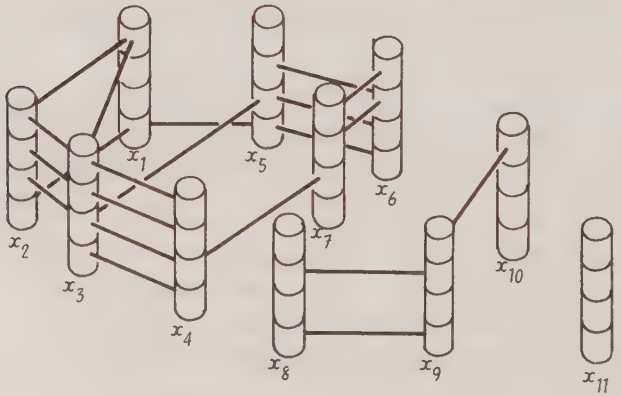


Abb. 1.3. Ein Multigraph $\Gamma_{4,11,21}$

In dem Multigraphen aus Abb. 1.3 gilt:

$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ und $\{x_8,x_9,x_{10}\}$ sind echte 1-Komponenten, x_{11} ist ein 1-isolierter Knoten;

$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\{x_5,x_6,x_7\}$ und $\{x_8,x_9\}$ sind echte 2-Komponenten, x_{10} und x_{11} sind 2-isolierte Knoten;

$\{x_2,x_3,x_4\}$ und $\{x_5,x_6\}$ sind echte 3-Komponenten, alle übrigen Knoten sind 3-isoliert;

$\{x_3,x_4\}$ ist die einzige echte 4-Komponente; die restlichen Knoten sind 4-isoliert, d.h. entartete 4-Komponenten.

Für s=2 erhalten wir zusätzlich:

$\{x_5,x_6\}$ ist ein Beispiel für ein 2-verbundenes Knotenpaar;

x_1,x_2,x_3,x_4 bilden einen 2-Pfad der Größe 4;

$\{x_2,x_3,x_4\}$ ist ein Beispiel für einen 2-Baum der Größe 3.

Genauso, wie man bei einfachen Graphen $\Gamma = (G,H)$ in Anlehnung an die bildliche Darstellung des Graphen sagt, daß "die Kante e_{ij} zwischen den Knoten x_i und x_j liegt" oder "gezogen wird", wenn $e_{ij} \in H$ gelten soll, so sprechen wir auch bei Multigraphen davon, daß "eine Kante $e_{ij\ell}$ aus der Belegung zwischen x_i und x_j gezogen wird" oder, was dasselbe bedeutet, "auf den entsprechenden Platz dieser Belegung gelegt wird", wenn $e_{ij\ell}$ ein Element der Kantenmenge des Multigraphen sein soll.

1.2. Gliederung, Überblick über den Inhalt der vorliegenden Arbeit

In den Kapiteln 2,4,5 wird ein Wahrscheinlichkeitsmodell für ungerichtete, vollständig indizierte Zufallsmultigraphen entwickelt. Dieses Modell ist eine Verallgemeinerung eines von P. Erdös und A. Rényi für Zufallsgraphen benutzten Ansatzes. Die für die Theorie dieser Kapitel notwendigen Definitionen und Bemerkungen, in denen der Wahrscheinlichkeitsraum der Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ festgelegt wird, sind in Paragraph 2.1 enthalten. Im nächsten Paragraphen werden dann die Zufallsvariablen auf dem Raum $\Omega_{t,n,N}$ der Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ definiert, deren Verteilungen bzw. Verteilungsparameter bestimmt werden sollen. Es handelt sich dabei um die Variablen

"Anzahl der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$",
"Anzahl der mit einem Knoten x_i s-verbundenen Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$",
"Anzahl der s-Komponenten in $\Gamma_{t,n,N}$",
"Anzahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$",
"Anzahl der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$".

Eine Analogie zwischen den beiden Begriffen "Kante" für einen einfachen Graphen und "s-gesättigte Belegung" eines vollständig indizierten Multigraphen wird in Paragraph 2.3 erläutert. Diese Analogie ist für spätere Beweise ein wichtiges Hilfsmittel.

In Kapitel 3 werden zuerst die zwei üblichen Wahrscheinlichkeitsmodelle für Zufallsgraphen und ein Modell für Zufallsmultigraphen kurz erläutert. Daran anschließend sind einige bekannte Resultate der Theorie der Zufallsgraphen zusammengestellt, die im Rahmen dieser Arbeit interessant sind.

In Kapitel 4 werden die Verteilungen bzw. Verteilungsparameter der o.g. Zufallsvariablen für finite Parameter Knotenzahl n, Kantenzahl N, Zahl t der "Schichten" und Stärke s der Verbundenheit zweier Knoten hergeleitet. Im ersten Paragraphen werden die für die nachfolgende Theorie notwendigen Hilfssätze und kombinatorischen Formeln bereitgestellt. In Paragraph 4.2 folgen dann Ergebnisse für die ersten beiden der o.g. Zufallsvariablen und in 4.4 Resultate für die beiden letzten Variablen. Die in 4.3 hergeleitete Formel für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N}$ s-zusammenhängend ist, wird für das Hauptresultat

in 4.4 - Erwartungswert und Varianz der Zahl der s-Komponenten der Größe m - benötigt. Die sich aus der allgemeinen Theorie für die Sonderfälle s=1, s=2 und s=t ergebenden Vereinfachungen werden in den Paragraphen 4.5 und 4.6 angegeben. Die Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels erfolgt in 4.7.

In Kapitel 5 wird das asymptotische Verhalten von Folgen von Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ für $n \to \infty$ und N=N(n) untersucht. Wir zeigen, daß nur für

$$N(n) = \left[\tfrac{1}{2} n^{2-1/s} \left(\frac{t^s}{\binom{t}{s}} \left(\ell n\, n + c + o(1) \right) \right)^{1/s} \right]$$

die Folge der Erwartungswerte der Anzahlen der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$ gegen eine positive Konstante und die Folge der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß $\Gamma_{t,n,N(n)}$ s-zusammenhängend ist, gegen einen Wert aus dem offenen Intervall (0,1) konvergiert. Außerdem werden die Grenzverteilungen der Anzahl der s-isolierten Knoten, sowie der Anzahl der s-Komponenten bzw. der echten s-Komponenten hergeleitet. Diese Grenzverteilungen sind für die beiden ersten Zufallsvariablen Poissonverteilungen, während die letzte Variable in der Grenze einer Einpunktverteilung mit dem Träger 1 genügt. Im ersten Paragraphen dieses Kapitels werden wieder die Hilfsmittel für die weitere Theorie bereitgestellt. In 5.2 werden dann aus beweistechnischen Gründen die eben erwähnten Ergebnisse erst für den Sonderfall s=1 hergeleitet und anschließend in 5.3 auf bel. s ($1 \leq s \leq t$) erweitert. In 5.4 werden die Ergebnisse diskutiert.

In Abschnitt 5.2.4 und Paragraph 5.4 werden unter anderem solche Folgen N(n) angegeben, für die die Annäherung der Erwartungswerte der Anzahlen der 1-isolierten bzw. t-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$ an den Grenzwert bereits für kleine Knotenzahlen n zufriedenstellend ist. Zum Vergleich sind einige numerische Ergebnisse beigefügt.

2. Das Wahrscheinlichkeitsmodell für ungerichtete, vollständig indizierte Zufallsmultigraphen

Ziel dieser Arbeit ist es, Aussagen über die Wahrscheinlichkeit dafür zu machen, daß ein zufällig der Menge der ungerichteten, vollständig indizierten Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ entnommener Repräsentant bestimmte Eigenschaften besitzt, etwa daß er genau k s-isolierte Knoten besitzt, oder daß er z.B. ganz s-zusammenhängend ist.

Im ersten Paragraphen dieses Kapitels definieren wir deshalb den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,A,P) mit der Menge $\Omega=\Omega_{t,n,N}$ der zugelassenen Multigraphen. Im darauffolgenden Paragraphen werden die im letzten Kapitel definierten Eigenschaften für Multigraphen durch Zufallsvariablen beschrieben, die auf $\Omega_{t,n,N}$ definiert werden.

In Paragraph 2.3 schließlich erläutern wir eine Analogie zwischen den beiden Begriffen "s-gesättigte Belegung" eines Multigraphen und "Kante" eines einfachen Graphen. Diese Entsprechung ist von Bedeutung für die Theorie der beiden Kapitel 4 und 5.

2.1. Definition des Wahrscheinlichkeitsraumes

Definition 2.1. Seien $t,n\in\mathbb{N}$ und $N\in\mathbb{N}_0$ mit $0\leq N\leq t\binom{n}{2}$ gegeben; ebenso seien $G=\{x_1,\dots,x_n\}$, K und ${}^tK$ wie in Def. 1.1 gegeben. Dann ist (Ω,A,P) mit $\Omega=\Omega_{t,n,N}:=\{\Gamma_{t,n,N}=(G,H):H\subset{}^tK,|H|=N\}$, $A:=P(\Omega)$ und P nach

$$(2.1)\qquad P(\{\Gamma_{t,n,N}\}):=\frac{1}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}\qquad\forall\Gamma_{t,n,N}\in\Omega$$

der Wahrscheinlichkeitsraum der ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ bei Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit.

Wegen $|{}^tK|=t\binom{n}{2}$ ist diese Definition nur sinnvoll für $0\leq N\leq t\binom{n}{2}$; und in diesem Fall ist auch $|\Omega|=\binom{t\binom{n}{2}}{N}$, wie man sofort sieht. Für N=0 oder $N=t\binom{n}{2}$ enthält Ω genau ein Element, nämlich den Multigraphen mit leerer bzw. maximaler Kantenmenge, diese beiden Fälle sind uninteressant.

Anschaulich besagt Def. 2.1 folgendes: Es sei die n-elementige Knotenmenge G vorgegeben. Von den $t\binom{n}{2}$ Elementen in ${}^tK$ werden ohne Zurücklegen N Kanten "zufällig" nacheinander gezogen und auf die entsprechenden Plätze zwischen den Knoten verteilt (ein "Urnenmodell ohne Zurücklegen" mit den Elementen von ${}^tK$ als "Kugeln" der Urne). Wird die Reihenfolge, in der die Kanten gezogen werden, nicht berücksichtigt, so gibt das $\binom{t\binom{n}{2}}{N}$ verschiedene Multigraphen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein so "zufällig" ausgewählter Multigraph, ein "Zufallsmultigraph" $\Gamma_{t,n,N}$ also, gleich einem vorgegebenen Multigraphen $G_{t,n,N}$ ist, ergibt sich somit zu

$$(2.2) \qquad P(\Gamma_{t,n,N}=G_{t,n,N}) = \frac{1}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} .$$

Ist A eine Eigenschaft, so bezeichnen wir mit $P_{t,n,N}(A)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein so zufällig gezogener Multigraph $\Gamma_{t,n,N}$ diese Eigenschaft besitzt. Falls $a_{t,n,N}$ die Anzahl der Multigraphen mit n Knoten und N Kanten ist, die die Eigenschaft A besitzen, so gilt

$$(2.3) \qquad P_{t,n,N}(A) = \frac{a_{t,n,N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} .$$

Wegen der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit genügt zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N}$ eine bestimmte Eigenschaft besitzt, die Berechnung der Anzahl der Multigraphen mit dieser Eigenschaft.

Wir schreiben im folgenden $(\Omega_{t,n,N},{}^A{}_{t,n,N},P_{t,n,N})$ bzw. $(\Omega_{n,N},{}^A{}_{n,N},P_{n,N})$, falls t=1 gilt, statt des kürzeren (Ω,A,P) nur dann, wenn es zum besseren Verständnis beiträgt.

2.2. Definition der Zufallsvariablen

Die nachstehend genannten Zufallsvariablen gestatten eine übersichtliche Beschreibung der in Paragraph 1.1 eingeführten Begriffe. Sie werden auf dem Raum Ω der ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ definiert, und ihr Wahrscheinlichkeitsmaß wird durch (2.1) induziert.

Im folgenden seien neben den ganzzahligen Parametern t,n,N, durch die bestimmt ist, welche und wieviel Multigraphen in Ω enthalten sind, noch die natürlichen Zahlen s,ℓ,i,j,m gegeben. Für diese Zahlen gelte

$$1 \leq s \leq t,\ 1 \leq \ell \leq t,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq m \leq n.$$

Wir setzen für alle Elemente $\Gamma_{t,n,N} = (G,H)$ aus Ω

$$T_{i,j,\ell}(\Gamma_{t,n,N}) := \begin{cases} 1, \text{ wenn } e_{ij\ell} \in H \text{ oder } e_{ji\ell} \in H \text{ gilt,} \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Die Zufallsvariable $T_{i,j,\ell}$ nimmt also genau bei den Argumenten $\Gamma_{t,n,N}$ aus Ω den Wert 1 an, die eine Kante in der ℓ-ten Schicht zwischen den Knoten x_i und x_j haben. Somit gilt nach Definition

$$T_{i,i,\ell}(\Gamma_{t,n,N}) = 0 \quad \forall \Gamma_{t,n,N} \in \Omega.$$

Außerdem sind die Variablen symmetrisch in i und j, d.h. es ist

$$T_{i,j,\ell}(\Gamma_{t,n,N}) = T_{j,i,\ell}(\Gamma_{t,n,N}) \quad \forall \Gamma_{t,n,N} \in \Omega.$$

Wenn wir im folgenden das Argument bei Nennung der Zufallsvariablen nicht mit aufführen, setzen wir in der Regel die Zahlen t, n und N als Indizes an die Variablen an, damit klar ist, auf welchem Raum von Multigraphen sie definiert sind. Hier ist also $T_{t,n,N,i,j,\ell}$ die auf dem Raum $\Omega = \{\Gamma_{t,n,N} = (G,H) : G=\{x_1,\dots,x_n\}, |H|=N\}$ definierte Zufallsvariable $T_{i,j,\ell}$. Diese Schreibweise ist vor allem nützlich in der Formulierung der Grenzwertsätze von Kapitel 5, wo der Fall $n \to \infty$ und $N=N(n)$ untersucht wird. Sind dagegen die Indizes aus dem Zusammenhang heraus bekannt, besonders in Beweisen, so werden sie zu Gunsten einer kompakteren Schreibweise weggelassen.

Die Zufallsvariable $T_{t,n,N,i,j}$, die definiert ist durch

$$(2.5) \qquad T_{t,n,N,i,j} := \sum_{\ell=1}^{t} T_{t,n,N,i,j,\ell},$$

gibt die Zahl der Kanten an, die zwischen den Knoten x_i und x_j eines Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ liegen. Dabei besagt die Schreibweise in (2.5), daß gelten soll

$$T_{i,j}(\Gamma_{t,n,N}) = \sum_{\ell=1}^{t} T_{i,j,\ell}(\Gamma_{t,n,N}) \quad \forall \Gamma_{t,n,N} \in \Omega.$$

Die Zufallsvariable $U_{t,s,n,N,i,j}$ sei gegeben durch

$$(2.6) \qquad U_{t,s,n,N,i,j} := \begin{cases} 1, \text{ falls } T_{t,n,N,i,j} \geq s \text{ gilt,} \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese Variable gilt also $U_{s,i,j}(\Gamma_{t,n,N}) = 1$ genau dann, wenn die Knoten x_i und x_j dieses Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ s-verbunden sind. Auch hier gilt $U_{t,s,n,N,i,j} = U_{t,s,n,N,j,i}$ und $U_{t,s,n,N,i,i} = 0$.

$$(2.7) \qquad U_{t,s,n,N,i} := \sum_{j=1}^{n} U_{t,s,n,N,i,j}$$

ist dann die Zufallsvariable "Zahl der mit x_i s-verbundenen Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$". Diese Zahl haben wir auch s-Grad von x_i genannt in Verallgemeinerung des bei einfachen Graphen üblichen Begriffes "Grad von x_i".

Aus diesen Variablen ergibt sich die Anzahl der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$ zu

$$(2.8) \qquad V_{t,s,n,N} := \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{t,s,n,N,i,j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} U_{t,s,n,N,i}.$$

$$(2.9) \qquad X_{t,s,n,N,i} := \begin{cases} 1, \text{ falls } U_{t,s,n,N,i} > 0, \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

nimmt den Wert 1 genau für solche Argumente $\Gamma_{t,n,N}$ an, bei denen der Knoten x_i in einer echten s-Komponenten liegt.

Bisher haben wir Eigenschaften von Knoten oder Belegungen in Multigraphen durch Zufallsvariablen erfaßt. Im folgenden interessieren wir uns für die Zahl der s-Komponenten in Zufallsmultigraphen.

Sei die Zufallsvariable $X^*_{t,s,n,N,m,i}$ definiert durch

$$(2.10)\qquad X^*_{t,s,n,N,m,i} := \begin{cases} 1/m, & \text{falls } x_i \text{ in einer s-Komponenten der} \\ & \text{Größe m von } \Gamma_{t,n,N} \text{ liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$X^*_{t,s,n,N,1,i}$ nimmt also genau für die Multigraphen den Wert 1 an, bei denen der Knoten x_i s-isoliert ist; d.h. es gilt

$$(2.11)\qquad X^*_{t,s,n,N,1,i} = 1 - X_{t,s,n,N,i}\,.$$

Wegen obiger Definition von $X^*_{t,s,n,N,m,i}$ ist

$$(2.12)\qquad Y^*_{t,s,n,N,m} := \sum_{i=1}^{n} X^*_{t,s,n,N,m,i}$$

die Zufallsvariable "Zahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$"; bei m=1 bedeutet das die Zahl der s-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen. Mit

$$(2.13)\qquad Y_{t,s,n,N} := \sum_{i=1}^{n} X_{t,s,n,N,i} = n - \sum_{i=1}^{n} X^*_{t,s,n,N,1,i} = n - Y^*_{t,s,n,N,1}$$

erhalten wir die "Zahl der Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$, die in echten s-Komponenten liegen". Schließlich setzen wir noch

$$(2.14)\qquad Z_{t,s,n,N} := \sum_{m=1}^{n} Y^*_{t,s,n,N,m}\,,$$

$$(2.15)\qquad \tilde{Z}_{t,s,n,N} := \sum_{m=2}^{n} Y^*_{t,s,n,N,m}\,.$$

Somit bedeutet $Z_{t,s,n,N}$ die "Zahl der s-Komponenten in $\Gamma_{t,n,N}$" und $\tilde{Z}_{t,s,n,N}$ die "Zahl der echten s-Komponenten in $\Gamma_{t,n,N}$".

Aufgrund der Vereinbarungen in diesem und dem vorigen Paragraphen bieten sich für die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die hier auf $\Omega_{t,n,N}$ definierten Zufallsvariablen bestimmte Werte annehmen, die beiden Schreibweisen

$$P_{t,n,N}(T_{i,j,\ell}=\tau),\ldots,P_{t,n,N}(\tilde{Z}_s=z) \quad \text{bzw.}$$

$$P(T_{t,n,N,i,j,\ell}=\tau),\ldots,P(\tilde{Z}_{t,s,n,N}=z)$$

an. In der Regel wird der letzteren der Vorzug gegeben.

2.3. Eine Analogie der Begriffe "s-gesättigte Belegung" in Multigraphen und "Kante" in einfachen Graphen

Es ist sofort klar, daß in einem einfachen Graphen (t=1) die Begriffe "1-gesättigte Belegung" und "Kante" dasselbe bedeuten. Darüber hinaus besteht auch für allgemeine Werte von t und s eine Entsprechung zwischen den beiden Begriffen "s-gesättigte Belegung" eines Multigraphen und "Kante" eines Graphen:

Zwei Knoten x_i und x_j werden jeweils dann als "miteinander verbunden" angesehen, wenn zwischen ihnen eine s-gesättigte Belegung bzw. bei einfachen Graphen eine Kante liegt.

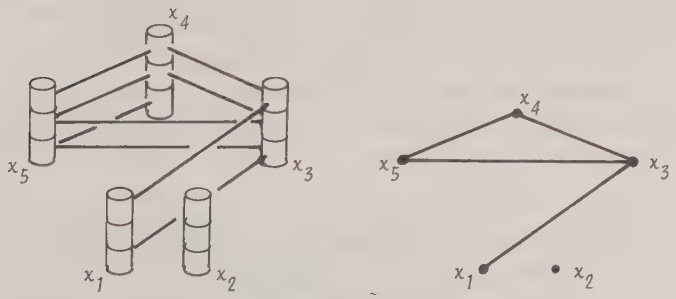
Man kann jedem Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}=(G,H)$ mit $|G|=n$ und $|H|=N$ einen Graphen $\tilde{\Gamma}_{1,n,v}=(\tilde{G},\tilde{H})$ zuordnen mit

$$\tilde{G} = G \quad \text{und} \quad \tilde{H} = \{e_{ij}=\{x_i,x_j\}: x_i,x_j \in G, i<j, |\{e_{ij1},\dots,e_{ijt}\} \cap H| \geq s\}.$$

Es gilt also

$$|\tilde{H}| = v = V_s(\Gamma_{t,n,N}).$$

D.h. die Zahl v der Kanten in $\tilde{\Gamma}_{1,n,v}$ ist der Wert der Zufallsvariablen $V_{t,s,n,N}$, der Zahl der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$ (vgl. Abb. 2.1).



$\Gamma_{3,5,9} \rightarrow \tilde{\Gamma}_{1,5,4}$

Abb. 2.1. Multigraph und zugehöriger Einfachgraph für s=2

3. Einige bekannte Modelle und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige bekannte Ergebnisse aus der Theorie der (einfachen) Zufallsgraphen aufgeführt, sofern sie für diese Arbeit von Bedeutung sind. Zuerst aber möchten wir drei wichtige Wahrscheinlichkeitsmodelle angeben, die den verschiedenen Arbeiten über Zufallsgraphen bzw. Zufallsmultigraphen zugrundeliegen.

3.1. Bekannte Wahrscheinlichkeitsmodelle

Alle drei folgenden Modelle haben gemeinsam, daß n Knoten gegeben sind und Kanten "zufällig" zwischen diesen verteilt werden.

Modell 1: Dieses Modell wird in Gilbert (1959) wie folgt definiert:

> "Let n points, numbered 1,2,...,n, be given. There are n(n-1)/2 lines which can be drawn joining pairs of these points. Choosing a subset of these lines to draw, one obtains a graph; there are $2^{n(n-1)/2}$ possible graphs in total. Pick one of these graphs by the following random process. For pairs of points make random choices, independent of each other, whether or not to join the points of the pair by a line. Let the common probability of joining be p. Equivalently, one may erase lines, with common probability q=1-p from the complete graph."

Einige sowjetische Autoren (vgl. Burtin (1975), Kel'mans (1972), Stepanov (1969,1970)) wählen $p = 1-e^{-f(n)}$ ($f(n)>0$; n ist wieder die Zahl der Knoten) und studieren das asymptotische Verhalten von Zufallsgraphen für verschiedene Wahlen von f(n).

Modell 2: In Austin, Fagen, Penney und Riordan (1959) wird das Verhalten von Zufallsmultigraphen untersucht. Die Autoren definieren dabei das Wahrscheinlichkeitsmodell folgendermaßen:

> "Given n distinct points, N selections of pairs are made independently and at random, each of the $\binom{n}{2}$ possible pairs having the same chance $1/\binom{n}{2}$ of selection at each trial. Once selected, a pair is connected by a line joining its two points,

labelled by the order number of its selection; thus, after N selections, a linear graph with n distinct (labelled) points and N distinct (labelled) lines connecting pairs of points is formed. (Note that the rule of formation implies the graph contains no slings, but may contain lines in parallel.)"

Man beachte, daß sich das Modell von T.L. Austin, R.E. Fagen, W.F. Penney und J. Riordan von dem in Paragraph 2.1 definierten Modell für Zufallsmultigraphen unterscheidet. (Es gibt in Modell 2 keine "Schichten von übereinandergelegten einfachen Graphen", vgl. auch die Anmerkungen 1.1 und 1.2 im Anschluß an Def. 1.1.)

Die Anzahl der möglichen Multigraphen mit n Knoten und N Kanten ergibt sich in diesem Modell zu $(\!(\binom{n}{2})\!)^N$; diese werden als gleichwahrscheinlich angesehen. Man kann dies also als ein "Urnenmodell mit Zurücklegen" auffassen.

Modell 3: Die Mehrzahl der Autoren benutzt ein Modell, das in Erdös und Rényi (1960) auf diese Weise definiert wird:

"Our aim is to study the probable structure of a random graph $\Gamma_{n,N}$ which has n given labelled vertices $P_1, P_2, \ldots, P_n$ and N edges; we suppose that these N edges are chosen at random among the $\binom{n}{2}$ possible edges, so that all $\binom{\binom{n}{2}}{N} = c_{n,N}$ possible choices are supposed to be equiprobable. Thus if $G_{n,N}$ denotes any of the $c_{n,N}$ graphs formed from n given labelled points and having N edges, the probability that the random graph $\Gamma_{n,N}$ is identical with $G_{n,N}$ is $1/c_{n,N}$. If A is a property which a graph may or may not possess, we denote by $P_{n,N}(A)$ the probability that the random graph $\Gamma_{n,N}$ possesses the property A, i.e. we put $P_{n,N}(A) = a_{n,N}/c_{n,N}$ where $a_{n,N}$ denotes the number of those $G_{n,N}$ which have the property A."

Dieses Modell entspricht einem "Urnenmodell ohne Zurücklegen". Es ergibt sich als Sonderfall t=1 des von uns entwickelten und in Paragraph 2.1 dargestellten Wahrscheinlichkeitsmodells.

Den Modellen 2 und 3 ist gemeinsam, daß die Kantenzahl N vorgegeben ist. Durch den Zufallsprozess der Kantenwahl in Modell 1 ist dort die Anzahl der Kanten eine Zufallsvariable; dieses Modell unterscheidet

sich also prinzipiell von den übrigen. Setzt man in Modell 1 $p = N/\binom{n}{2}$, so erhält man Zufallsgraphen, die im Mittel N Kanten haben. Für diese Wahl von p liefern die Modelle 1 und 3 für $n \to \infty$ und N=N(n) bei gleichen Fragestellungen dieselben Ergebnisse, wenn N(n) geeignet gewählt wird (vgl. Burtin (1975), Erdös und Rênyi (1960)). Auch die Modelle 2 und 3 liefern asymptotisch ($n \to \infty$) für nicht zu stark wachsende Funktionen N(n) bei äquivalenten Fragestellungen dieselben Ergebnisse, wie Erdös und Rênyi (1960) erwähnen.

Die im nächsten Paragraphen genannten Sätze und Ergebnisse setzen alle das zuletzt genannte Modell 3 voraus.

3.2. Einige Ergebnisse aus der Theorie der Zufallsgraphen

Wir geben in diesem Paragraphen einige Ergebnisse aus der Theorie der Zufallsgraphen an, die für den weiteren Verlauf der Arbeit interessant sind. Dabei sei bei den folgenden Formeln i.a. vorausgesetzt, daß für die ganzzahligen Parameter n, N und m gilt

$$1 \leq n,\ 0 \leq N \leq \binom{n}{2},\ 1 \leq m \leq n.$$

Um bei der Formulierung der Sätze dieses und der nächsten Paragraphen nicht immer Sonderfälle mit aufführen zu müssen, ist es sinnvoll, zusätzlich noch Anzahlen für bestimmte Eigenschaften des leeren Graphen (d.h. des Graphen Γ_{00} mit leerer Knoten- und Kantenmenge) zu 1 zu setzen, wie es in Anmerkung 3.1 und Satz 3.5 geschieht.

Sei im folgenden $C_{n,N}$ die Anzahl der Graphen $\Gamma_{n,N}$ mit n Knoten und N Kanten, die zusammenhängend sind. Aus Riddell und Uhlenbeck (1953) stammt die im folgenden Satz angegebene Formel für $C_{n,N}$. Einen Beweis mit Hilfe des Kalküls der formalen Potenzreihen findet man in Gilbert (1956).

Satz 3.1 (Riddell und Uhlenbeck, 1953). Für die Anzahl $C_{n,N}$ der nichtleeren zusammenhängenden Graphen $\Gamma_{n,N}$ (also $n \geq 1$) gilt im Bereich $n-1 \leq N \leq \binom{n}{2}$

$$(3.1.1)\quad C_{n,N} = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\substack{0<n_i \text{ für } 1\leq i\leq m \\ n_1+\ldots+n_m=n}} \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_m!} \binom{\binom{n_1}{2}+\ldots+\binom{n_m}{2}}{N};$$

außerhalb des o.a. Bereiches für N ist $C_{n,N} = 0$.

Anmerkung 3.1. Zusätzlich zu (3.1.1) wollen wir noch vereinbaren, daß der leere Graph Γ_{00} zusammenhängend sein soll; es gelte also

$$(3.1.2)\quad C_{00} := 1.$$

Es ist außerdem leicht zu zeigen, daß ein Graph mit n Knoten und weniger als n-1 Kanten nicht zusammenhängend sein kann, also $C_{n,N} = 0$ gilt für $N < n-1$. Da ein ungerichteter Graph mit n Knoten, der weder Schlingen noch Mehrfachkanten enthält, höchstens $\binom{n}{2}$ Kanten besitzt, ist es weiterhin sinnvoll, noch $C_{n,N} = 0$ zu fordern für $N > \binom{n}{2}$. Das folgt auch bereits formal aus (3.1.1).

Für die beiden Sonderfälle N=n-1 und N=n ergeben sich einfachere Formeln, die wir als Sätze 3.2 und 3.3 angeben. Die Zahl $C_{n,n-1}$, d.h. die Zahl der Bäume mit n Knoten, berechnete Cayley.

Satz 3.2 (Cayley,1887). Für die Zahl der nichtleeren Bäume mit n Knoten gilt die Beziehung

$$C_{n,n-1} = n^{n-2} .$$

Aus der in Paragraph 3.1 zitierten Arbeit von Austin, Fagen, Penney und Riordan (1959) läßt sich unmittelbar eine Formel für die Zahl $C_{n,n}$ der zusammenhängenden Graphen mit n Knoten und n Kanten herleiten; das ist die Zahl der zusammenhängenden Graphen, die genau einen Kreis enthalten. Der Beweis der Formel erfolgt in oben zitierter Arbeit über erzeugende Funktionen.

Satz 3.3 (Austin,Fagen,Penney und Riordan,1959). Für die Zahl der zusammenhängenden Graphen mit n Knoten und n Kanten gilt bei $n \geq 3$

$$C_{n,n} = \tfrac{1}{2}(n-1)!\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^{n-3}}{(n-3)!}\right).$$

Wegen Anmerkung 3.1 haben wir $C_{00} = 1$. Da wir in diesem Paragraphen nur Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten betrachten, definieren wir zusätzlich $C_{11} := 0$ und $C_{22} := 0$. Rényi (1959) und später Ling (1971) bewiesen die folgende asymptotische Beziehung für die Zahlen $C_{n,n}$.

Satz 3.4 (Rényi,1959). Es gilt

$$C_{n,n} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\, n^{n-\frac{1}{2}} .$$

Man ersieht aus den beiden Sätzen 3.2 und 3.4 das starke Anwachsen der Zahlen $C_{n,n-1}$ und $C_{n,n}$ mit wachsendem n.

Wir bezeichnen die Anzahl der Graphen $\Gamma_{n,N}$, die keine isolierten Knoten haben (aber durchaus aus mehreren echten Komponenten bestehen dürfen), im folgenden mit $L_{n,N}$. Diese Anzahl kann wie im nachstehend aufgeführten Satz angegeben berechnet werden.

Satz 3.5. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $\{\frac{1}{2}n\} \leq N \leq \binom{n}{2}$ ist die Zahl $L_{n,N}$ der Graphen $\Gamma_{n,N}$, die keine isolierten Knoten enthalten, gegeben durch

$$(3.2) \qquad L_{n,N} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{\binom{n-j}{2}}{N}$$

bzw. durch die Rekursionsformel

$$(3.3.1) \qquad L_{00} := 1,\ L_{n0} = L_{0N} = 0 \text{ für } n \neq 0 \text{ bzw. } N \neq 0,$$

$$(3.3.2) \qquad L_{1N} = 0 \quad \forall N,$$

$$(3.3.3) \qquad L_{n,N} = \frac{1}{N}\left(\left(\binom{n}{2}-(N-1)\right)L_{n,N-1} + n(n-1)L_{n-1,N-1} + \binom{n}{2}L_{n-2,N-1}\right);$$

außerhalb des o.a. Bereiches für N ist $L_{n,N} = 0$.

Die Formel (3.2) geben Erdös und Rényi (1959) an. Der Beweis erfolgt mit Hilfe der bekannten Formel von Sylvester oder Siebformel

$$(3.4) \qquad P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_j \leq k} P(A_{\nu_1} \cap \ldots \cap A_{\nu_j})$$

für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens mindestens eines der Ereignisse $A_1, \ldots, A_k$ (siehe Godehardt (1974,pp.60-67)). Die Rekursionsformel (3.3.1) - (3.3.3) mit Beweis findet man ebenfalls in Godehardt (1974,pp.62-63); andere Rekursionsformeln für $L_{n,N}$ stehen in Ling (1971,pp.65-68).

Anmerkung 3.2. Der Graph Γ_{10}, der aus genau einem Knoten besteht, ist nach den Definitionen aus Paragraph 1.1 zusammenhängend. Die Sätze 3.1 und 3.2 liefern auch folgerichtig $C_{10}=1$. Da dieser Graph jedoch lt. Def. auch einen isolierten Knoten enthält, muß ebenfalls $L_{10}=0$ gelten. Für $n \geq 2$ dagegen ist selbstverständlich die Forderung, daß $\Gamma_{n,N}$ keine isolierten Knoten enthalten soll, schwächer als die Forderung, daß dieser Graph zusammenhängend sein soll; es gilt also $C_{n,N} \leq L_{n,N}$ für $n \geq 2$. Weiterhin ist trivial, daß ein Graph mit n Knoten und weniger als $\{\frac{1}{2}n\}$ Kanten mindestens einen isolierten Knoten enthalten muß.

Soll ein Graph mit n Knoten, N Kanten und genau k ausgewählten isolierten Knoten $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ gebildet werden, so sind alle N Kanten so zwischen den n-k übrigen Knoten zu ziehen, daß von diesen keiner isoliert ist.

Die Zahl der Möglichkeiten, einen solchen Graphen zu bilden, ist somit $L_{n-k,N}$. Mit Hilfe von Satz 3.5 kann man also sofort die Verteilung der Zahl der isolierten Knoten in Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$ angeben. (Das ist nach den Vereinbarungen in Paragraph 2.2 die Verteilung der Zufallsvariablen $Y^*_{1,1,n,N,1}$.)

Korollar 3.6. Es gilt für die Verteilung der Anzahl der isolierten Knoten in einem Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$

$$P(Y^*_{1,1,n,N,1}=k) = \binom{n}{k} \frac{L_{n-k,N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} .$$

Anmerkung 3.3. Im Graphen Γ_{n0} sind alle Knoten isoliert; sobald aber ein Graph auch nur eine Kante enthält, können nicht mehr alle Knoten isoliert sein. Korollar 3.6 liefert im Fall k=n auch

$$P(Y^*_{1,1,n,0,1}=n) = 1, \; P(Y^*_{1,1,n,N,1}=n) = 0 \quad \text{für} \quad N \neq 0.$$

Außerdem kann kein Graph $\Gamma_{n,N}$ genau n-1 isolierte Knoten haben, denn wenn n-1 Knoten isoliert sind, muß der n-te ebenfalls isoliert sein. Entsprechend liefert Korollar 3.6

$$P(Y^*_{1,1,n,N,1}=n-1) = 0 \quad \forall N.$$

Mit denselben Überlegungen ergibt sich selbstverständlich auch die Verteilung von $Y_{1,1,n,N}$, der Zahl der nichtisolierten Knoten in einem Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$. Um eine Formel hierfür zu erhalten, braucht man wegen (2.13) in Korollar 3.6 nur die Zahlen k und n-k zu vertauschen. Weiter kann man mit Hilfe von (2.10) und (2.12) leicht die folgende Beziehung für den Erwartungswert von $Y^*_{1,1,n,N,1}$ herleiten wegen

$$EY^*_{1,1,n,N,1} = n EX^*_{1,1,n,N,1,1} = n P(X^*_{1,1,n,N,1,1}=1).$$

Satz 3.7. Der Erwartungswert der Anzahl der isolierten Knoten in Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$ ist gegeben durch

$$EY^*_{1,1,n,N,1} = n \frac{\binom{\binom{n-1}{2}}{N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} .$$

Diesen Satz findet man z.B. in L i n g (1971,1973).

Bilden wir einen Graphen $\Gamma_{n,N} = (G,H)$ mit $G=\{x_1,\dots,x_n\}$ dadurch, daß wir N Kanten "zufällig" zwischen diesen Knoten ziehen, so gibt uns $C_{m,\nu}$ für $1 \leq m \leq n$ und $0 \leq \nu \leq N$ die Zahl der Möglichkeiten an, daß ein Teilgraph von $\Gamma_{n,N}$, der die Knoten $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ und genau ν der Kanten aus H enthält, zusammenhängend ist. Es gilt $C_{m,\nu}=0$ für $\nu < m-1$ oder $\nu > min\{N,\binom{m}{2}\}$. Mit dieser Überlegung erhalten wir für die Verteilungsparameter Erwartungswert und Varianz der Zahl der Komponenten der Größe m in Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$ die beiden folgenden Sätze.

Satz 3.8 (Ling,1973). Für den Erwartungswert der Anzahl der Komponenten der Größe m in einem Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$ gilt

$$EY^*_{1,1,n,N,m} = \binom{n}{m} \sum_{\nu} \frac{\binom{\binom{n-m}{2}}{N-\nu}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} C_{m,\nu} \,.$$

Satz 3.9 (Naus und Rabinowitz,1975). Die Varianz der Zahl der Komponenten der Größe m in $\Gamma_{n,N}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} Y^*_{1,1,n,N,m} &= EY^*_{1,1,n,N,m} - (EY^*_{1,1,n,N,m})^2 \\ &\quad + \binom{n}{m}\binom{n-m}{m} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\binom{\binom{n-2m}{2}}{N-\mu-\nu}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} C_{m,\mu}\, C_{m,\nu} \,. \end{aligned}$$

Nach Anmerkung 3.2 enthalten die beiden letzten Sätze als Sonderfall m=1 auch den Erwartungswert und die Varianz der Zahl der isolierten Knoten.

Eine Formel für die Zahl der Möglichkeiten, N Kanten so zwischen n Knoten zu verteilen, daß ein derart gebildeter Graph genau k Komponenten der Größe m hat, ist uns nicht bekannt. (Mit dieser Formel wäre neben der in Korollar 3.6 angegebenen Verteilung der Zahl der isolierten Knoten - also m=1 - die Verteilung von $Y^*_{1,1,n,N,m}$ für bel. Werte von m gegeben.)

Betrachten wir eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen $((\Omega_{n,N},{}^{A}_{n,N},{}^{P}_{n,N}))_{n\to\infty,N\to\infty}$, deren Elemente gemäß Paragraph 2.1 definiert sind. Entnehmen wir jedem $\Omega_{n,N}$ ein Element $\Gamma_{n,N}$ "zufällig", so erhalten wir Folgen von Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$. Will man das asymptotische Verhalten solcher Folgen von Zufallsgraphen bzgl. bestimmter Eigenschaften studieren, so wählt man die Kantenzahl N als monoton wachsende Funktion von n, also N=N(n). Die wohl bekanntesten Ergebnisse über das asymptotische Verhalten solcher Zufallsgraphen stammen von P. Erdös und A. Rênyi, die eine Vielzahl von Arbeiten - auch zusammen oder mit anderen Autoren - über dieses Gebiet veröffentlicht haben. In einer dieser Publikationen (E r d ö s und R ê n y i (1959)) behandelten die beiden Autoren für

$$(3.5) \qquad N(n) = [\tfrac{1}{2}n(\ell n\, n + c + o(1))]$$

die folgenden Fragestellungen.

1. Wie groß ist der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß $\Gamma_{n,N(n)}$ zusammenhängend ist?
2. Wie groß ist der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß die größte Komponente von $\Gamma_{n,N(n)}$ genau n-k Knoten hat (k=0,1,2,...)?
3. Wie sieht die Grenzverteilung der Anzahl der Komponenten in $\Gamma_{n,N(n)}$ aus (wenn sie überhaupt existiert)?

Sie erhielten diese Lösungen auf ihre Fragen.

Satz 3.10 (Erdös und Rênyi,1959). Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsgraph $\Gamma_{n,N(n)}$ zusammenhängend ist, konvergiert gegen $exp(-e^{-c})$ für $n\to\infty$.

Satz 3.11 (Erdös und Rênyi,1959). Die Anzahl der Knoten, die nicht in der größten Komponenten von $\Gamma_{n,N(n)}$ liegen, ist in der Grenze Poissonverteilt mit Parameter $\lambda=e^{-c}$.

Satz 3.12 (Erdös und Rênyi,1959). Für die Verteilung der Anzahl der Komponenten in einem Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N(n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{1,1,n,N(n)}=k+1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{mit } \lambda = e^{-c}.$$

Satz 3.10 ist eine direkte Folge aus Satz 3.12 mit k=0. Im Beweis zu den Sätzen 3.11 und 3.12 zeigen die Autoren zuerst, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Knoten, die nicht in der größten Komponenten von $\Gamma_{n,N(n)}$ liegen, sogar isoliert sind, gegen 1 strebt. Aus Satz 3.11 läßt sich somit auch das folgende Korollar ableiten.

Korollar 3.13. Die Anzahl der isolierten Knoten in Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N(n)}$ ist in der Grenze Poissonverteilt mit Parameter $\lambda = e^{-c}$.

Der Erwartungswert dieser Grenzverteilung ist also e^{-c}. Ebenso läßt sich unter Benutzung der in Satz 3.7 angegebenen Formel leicht nachweisen, daß für solche Funktionen N(n), die (3.5) erfüllen, gilt

$$(3.6) \qquad 0 < \lim_{n\to\infty} EY^{*}_{1,1,n,N(n),1} = e^{-c} < \infty .$$

Daraus läßt sich ableiten, daß in oben zitierter Arbeit die Bedingung (3.5) an die Kantenfunktion N(n) deshalb gestellt wird, um einen positiven endlichen Grenzwert für die Folge der Erwartungswerte der Anzahl der isolierten Knoten in $\Gamma_{n,N(n)}$ zu bekommen (vgl. hierzu auch Abschnitt 5.2.4).

Am Schluß dieses Kapitels möchte ich auf die beiden Veröffentlichungen Erdös und Rênyi (1960) hinweisen, in denen die beiden Autoren die asymptotische Entwicklung von Zufallsgraphen für verschiedene Wahlen von Kantenfunktionen N(n) darstellen. Darüber hinaus wird in Erdös (1975) ein kurzer Überblick über die gelösten Fragen im Bereich der kombinatorischen Graphentheorie gegeben sowie eine Vielzahl noch nicht gelöster Probleme genannt.

4. Wahrscheinlichkeitstheorie der Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$

Im ersten Paragraphen dieses Kapitels werden einige kombinatorische Hilfsmittel für die weitere Theorie hergeleitet: Wir beweisen Formeln für die Anzahlen der Möglichkeiten, μ Elemente von ν gegebenen Belegungen unter Einhaltung bestimmter Nebenbedingungen zu entnehmen.

In Paragraph 4.2 leiten wir dann die Verteilung - einschließlich der Verteilungsparameter Erwartungswert und Varianz - der Zufallsvariablen $U_{t,s,n,N,i}$ und $V_{t,s,n,N}$ her. Das sind die beiden Variablen "Zahl der mit einem Knoten x_i s-verbundenen Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$" und "Zahl der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$". Paragraph 4.3 enthält Sätze über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N}$ genau k s-isolierte Knoten und eine s-Komponente der Größe n-k enthält.

In 4.4 betrachten wir die Zufallsvariable $Y^*_{t,s,n,N,m}$, das ist die Zahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$. Der erste Abschnitt in dem Paragraphen enthält Formeln für Erwartungswert und Varianz dieser Variablen für beliebige Wahlen von m. In Abschnitt 4.4.2 behandeln wir den Sonderfall m=1: Es werden Sätze über die Verteilung und die Verteilungsparameter der Anzahl der s-isolierten Knoten bewiesen.

In den beiden folgenden Paragraphen studieren wir die Sonderfälle s=1, s=2 und s=t. s=1 und s=t sind die beiden Extremfälle in dieser Theorie: Für s=1 genügt bereits eine Kante zwischen zwei Knoten, damit diese miteinander verbunden sind; bei s=t bezeichnen wir zwei Knoten erst dann als verbunden, wenn alle t Kanten zwischen diesen Knoten für die Kantenmenge H des Multigraphen gezogen sind.

In Paragraph 4.7 werden dann die Ergebnisse dieses Kapitels diskutiert. Hier werden u.a. die Beziehungen zu den in Kapitel 3 genannten bekannten Ergebnissen für einfache Zufallsgraphen genannt.

In Paragraph 4.1 ist ausdrücklich der Fall s=0 erlaubt; ebenso wird (ähnlich wie im letzten Paragraphen) die Zahl der Multigraphen, die s-zusammenhängend sind, auch für den leeren Multigraphen definiert. Ansonsten gilt wieder allgemein für die auftretenden ganzen Zahlen:

$$1 \leq t,\ 1 \leq n,\ 1 \leq s \leq t,\ 0 \leq \nu \leq \binom{n}{2},\ 0 \leq N \leq t\binom{n}{2},\ 1 \leq i,j,k,m \leq n.$$

4.1. Vorbereitungen für die Theorie dieses Kapitels

Die hier in Form von Hilfssätzen bereitgestellten kombinatorischen Formeln bilden die Grundlage der Beweise zu den Sätzen in den nachfolgenden Paragraphen.

Die in Def. 1.1 eingeführte Menge ${}^{t}K$ hat $\binom{n}{2}$ t-elementige Teilmengen $\{e_{ij1},\dots,e_{ijt}\}$, $1\leq i<j\leq n$, für die wir die Bezeichnung "Belegung" eingeführt haben. Die Elemente $e_{ij\ell}$ hiervon, die in der Menge H des Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}=(G,H)$ liegen, haben wir als "Kanten" bezeichnet. Sei jetzt $K_{t,s,v,\mu}$ die Zahl der Möglichkeiten, aus v ausgewählten Belegungen eines Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ genau μ Elemente so für die N-elementige Kantenmenge zu entnehmen, daß aus jeder dieser Belegungen höchstens s Elemente als Kanten gezogen werden. Das bedeutet nach Def. 1.2, daß keine dieser v Belegungen (s+1)-gesättigt ist. $K^{*}_{t,s,v,\mu}$ sei dagegen die Zahl der Möglichkeiten, den v Belegungen μ Kanten so zu entnehmen, daß aus jeder Belegung mindestens s Kanten gezogen werden.

Anmerkung 4.1. Für diese beiden Größen ist der Fall s=0 ebenfalls erlaubt und sinnvoll, während s=0 für die Definitionen aus Paragraph 1.1 keinen Sinn ergibt. (Jede Belegung wäre z.B. 0-gesättigt, und somit wären alle Knoten 0-verbunden und es gäbe nur 0-zusammenhängende Multigraphen.) Die folgenden Formeln für die Anzahlen $K_{t,s,v,\mu}$ bzw. $K^{*}_{t,s,v,\mu}$ ergeben sich aus Überlegungen, die zu bestimmten Urnenmodellen analog sind: Gegeben sind v Urnen zu je t Kugeln (die Elemente der Belegungen), je Urne sollen höchstens s bzw. mindestens s Kugeln (die Kanten) ohne Zurücklegen entnommen werden, so daß insgesamt μ Kugeln gezogen werden. Dabei spielt die Reihenfolge des Ziehens keine Rolle.

Lemma 4.1. Seien $t,n\in\mathbb{N}$ und $s,v,\mu\in\mathbb{N}_0$ mit den Nebenbedingungen $0\leq s\leq t$, $0\leq v\leq\binom{n}{2}$, $0\leq\mu\leq min\{sv,N\}$. Dann gilt

$$(4.1)\qquad K_{t,s,v,\mu}=\sum_{\substack{v_1+2v_2+\dots+sv_s=\mu\\ v_0+v_1+\dots+v_s=v}}\binom{v}{v_0,v_1,\dots,v_s}\binom{t}{0}^{v_0}\binom{t}{1}^{v_1}\cdot\dots\cdot\binom{t}{s}^{v_s};$$

außerhalb der o.a. Bereiche für s, v und μ ist $K_{t,s,v,\mu}=0$.

Beweis. Aus v_0 Belegungen wird keine Kante, aus v_1 Belegungen je eine Kante,..., aus v_s Belegungen werden s Kanten so gezogen, daß die Summe der Kanten μ beträgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. Wegen des "Dirichletschen Taubenschlagprinzips" oder "Schubfachprinzips" (vgl. H a l d e r und H e i s e (1976)) ist klar, daß nach dem Zug der (sv+1)-ten Kante mindestens eine Belegung (s+1)-gesättigt ist. Die übrigen Grenzen für den Bereich, in dem die Zahlen $K_{t,s,v,\mu}$ positiv sind, ergeben sich sofort aus der Definition dieser Zahlen.]

Im nächsten Lemma geben wir zwei Rekursionsformeln für die $K_{t,s,v,\mu}$.

Lemma 4.2. Seien t,s,n,v wie in Lemma 4.1 gegeben. Dann gilt

$$(4.2.1)\quad K_{t,0,v,0} = 1,\quad K_{t,0,v,\mu} = 0 \qquad \text{für } \mu \neq 0,$$

$$(4.2.2)\quad K_{t,1,v,\mu} = \binom{v}{\mu} t^{\mu} \qquad \text{für } 0 \leq \mu \leq min\{v,N\},$$

$$(4.2.3)\quad K_{t,s,v,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{v} \binom{v}{\lambda} \binom{t}{s}^{\lambda} K_{t,s-1,v-\lambda,\mu-s\lambda} \qquad \text{für } 0 \leq \mu \leq min\{sv,N\}.$$

Eine andere Rekursionsformel ist gegeben durch

$$(4.3.1)\quad K_{t,s,0,0} = 1,\quad K_{t,s,0,\mu} = 0 \qquad \text{für } \mu \neq 0.$$

$$(4.3.2)\quad K_{t,s,1,\mu} = \binom{t}{\mu} \qquad \text{für } 0 \leq \mu \leq min\{s,N\},$$

$$(4.3.3)\quad K_{t,s,v,\mu} = \sum_{\ell=0}^{s} \binom{t}{\ell} K_{t,s,v-1,\mu-\ell} \qquad \text{für } 0 \leq \mu \leq min\{sv,N\}.$$

Außerhalb der o.a. Bereiche ist $K_{t,s,v,\mu} = 0$.

Beweis. (a.1) (4.2.1) ist klar, da s=0 besagt, daß in jeder Belegung keine Kante gezogen werden darf. Formel (4.2.2) ergibt sich aus dieser Überlegung: Es darf in jeder der v Belegungen höchstens eine Kante gezogen sein (insgesamt μ Kanten). Also sucht man μ von den v Belegungen aus und wählt bei jeder dieser Belegungen je eine der t möglichen Kanten aus.

(a.2) Für allgemeines s gilt folgendes. Bei festem λ wählen wir λ Belegungen aus, aus denen wir je s (die maximal erlaubte Anzahl) Kanten entnehmen. Das gibt $\binom{v}{\lambda}\binom{t}{s}^{\lambda}$ mögliche Wahlen von $s\lambda$ der μ Kanten. Es bleiben $v-\lambda$ Belegungen, auf die höchstens je s-1 Kanten entfallen dürfen.

Da noch $\mu-s\lambda$ Kanten zu ziehen sind, gibt es hierfür $K_{t,s-1,v-\lambda,\mu-s\lambda}$ Möglichkeiten. Summation über λ liefert (4.2.3).

(b) Die Formeln (4.3.1) und (4.3.2) sind klar. Für allgemeines v gilt, daß auf v-1 Belegungen mindestens μ-s Kanten verteilt werden müssen, da auf die v-te Belegung nur höchstens s Kanten verteilt werden dürfen. Daraus folgt (4.3.3).]

Wenn man aus v Belegungen μ Kanten so zieht, daß aus jeder Belegung mindestens s Kanten entstammen, so werden $tv-\mu$ Elemente nicht gezogen, und zwar je Belegung höchstens t-s. Daraus ergibt sich der folgende Hilfssatz.

Lemma 4.3. Es gilt für $0 \leq s \leq t$, $0 \leq v \leq \binom{n}{2}$, $sv \leq \mu \leq min\{tv,N\}$

$$(4.4.1) \qquad K^*_{t,s,v,\mu} = K_{t,t-s,v,tv-\mu}\ ,$$

$$(4.4.2) \qquad K^*_{t,s,v,\mu} = \sum_{\substack{sv_s+\ldots+tv_t=\mu \\ v_s+\ldots+v_t=v}} \binom{v}{v_s,\ldots,v_t} \binom{t}{s}^{v_s} \cdot \ldots \cdot \binom{t}{t}^{v_t};$$

außerhalb des o.a. Bereiches ist $K^*_{t,s,v,\mu} = 0$.

Der folgende Hilfssatz liefert ein Gleichungssystem für die Berechnung der Zahlen $K^*_{t,1,v,\mu}$ bzw. $K_{t,t-1,v,tv-\mu}$. Der Beweis ist trivial.

Lemma 4.4. Es gilt

$$\binom{tv}{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{v} \binom{v}{\lambda} K^*_{t,1,\lambda,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{v} \binom{v}{\lambda} K_{t,t-1,\lambda,t\lambda-\mu}\ .$$

Anmerkung 4.2. Da $K^*_{t,0,v,\mu}$ die Zahl der Möglichkeiten angibt, μ Kanten beliebig aus v Belegungen zu ziehen, gilt

$$K^*_{t,0,v,\mu} = K_{t,t,v,tv-\mu} = \binom{tv}{\mu}.$$

Sei jetzt $\tilde{K}_{t,s,v_1,v_2,\mu}$ die Zahl der Möglichkeiten, aus $v = v_1+v_2$ Belegungen μ Kanten so zu entnehmen, daß v_1 bestimmte Belegungen s-gesättigt und die restlichen v_2 Belegungen nicht s-gesättigt sind. Für diese Anzahlen ergibt sich die folgende, leicht zu beweisende Formel.

Lemma 4.5. Es gilt für $1 \leq s \leq t$, $0 \leq v_1+v_2 \leq \binom{n}{2}$, $sv_1 \leq \mu \leq min\{tv_1+(s-1)v_2, N\}$

$$(4.5) \qquad \tilde{K}_{t,s,v_1,v_2,\mu} = \sum_{\lambda=sv_1}^{tv_1} K^*_{t,s,v_1,\lambda} \, K_{t,s-1,v_2,\mu-\lambda},$$

wobei die Summanden nach (4.4.2) und (4.1) berechnet werden. Zusätzlich sei noch

$$\tilde{K}_{t,0,v_1,0,\mu} = K^*_{t,0,v_1,\mu} = \binom{tv}{\mu}, \quad \tilde{K}_{t,0,v_1,v_2,\mu} = 0 \text{ für } v_2 \neq 0.$$

Ebenso ist $\tilde{K}_{t,s,v_1,v_2,\mu} = 0$ außerhalb der o.a. Bereiche.

Anmerkung 4.3. Für s=1 dürfen aus den v_2 Belegungen keine Kanten gezogen werden, d.h. (4.5) reduziert sich zu

$$\tilde{K}_{t,1,v_1,v_2,\mu} = K^*_{t,1,v_1,\mu}.$$

Für s=t müssen den v_1 Belegungen alle tv_1 Elemente entnommen werden; die restlichen $\mu-tv_1$ Kanten müssen aus den v_2 Belegungen so gezogen werden, daß keine dieser Belegungen t-gesättigt ist. Also folgt

$$\tilde{K}_{t,t,v_1,v_2,\mu} = K_{t,t-1,v_2,\mu-tv_1}.$$

Weiter folgt aus (4.5)

$$\tilde{K}_{t,s,0,v_2,\mu} = K_{t,s-1,v_2,\mu},$$
$$\tilde{K}_{t,s,v_1,0,\mu} = K^*_{t,s,v_1,\mu}.$$

4.2. Die Verteilung der Zufallsvariablen
"Anzahl der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$" bzw.
"Anzahl der Knoten, die mit x_i s-verbunden sind"

In Paragraph 2.3 hatten wir die Analogie zwischen den Begriffen "s-gesättigte Belegung" für ungerichtete, vollständig indizierte Multigraphen und "Kante" für ungerichtete, indizierte einfache Graphen verdeutlicht. Während jedoch in unserem Wahrscheinlichkeitsmodell die Anzahl N der zu ziehenden Kanten sowohl für einfache Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$ als auch für Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ eine vorgegebene Zahl ist, so ist die Zahl $V_{t,s,n,N}$ der s-gesättigten Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$ eine Zufallsvariable, die durch (2.8) definiert ist. In diesem Paragraphen bestimmen wir die Verteilung sowie Erwartungswert und Varianz von $V_{t,s,n,N}$, ebenso von $U_{t,s,n,N,i}$, der durch (2.7) definierten Zufallsvariablen "Anzahl der Knoten, die mit x_i s-verbunden sind". Die zuletzt genannte Zahl, die wir in 2.2 auch als s-Grad von x_i bezeichnet haben, gibt die Zahl der s-gesättigten Belegungen zwischen dem Knoten x_i und den n-1 übrigen Knoten an.

Die folgende Formel für die Verteilung von $V_{t,s,n,N}$ ist eine direkte Folgerung aus Lemma 4.5 des letzten Paragraphen.

Korollar 4.6. Es gilt für die Anzahl der s-gesättigten Belegungen in einem vollständig indizierten Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$

$$(4.6)\qquad P(V_{t,s,n,N}=v) = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{v}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N} .$$

Für die Verteilungsparameter erhalten wir diesen wichtigen Satz.

Satz 4.7. Seien p_1 und p_{12} wie folgt gegeben

$$(4.7)\qquad p_1 = \sum_{\ell=s}^{t} \binom{t}{\ell} \frac{\binom{t\binom{n}{2}-t}{N-\ell}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}, \quad p_{12} = \sum_{\ell_1=s}^{t} \sum_{\ell_2=s}^{t} \binom{t}{\ell_1}\binom{t}{\ell_2} \frac{\binom{t\binom{n}{2}-2t}{N-\ell_1-\ell_2}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} ;$$

mit diesen Zahlen gilt

$$(4.8.1)\qquad EV_{t,s,n,N} = \binom{n}{2} p_1,$$

$$(4.8.2)\qquad \operatorname{Var} V_{t,s,n,N} = \binom{n}{2} p_1(1-p_1) + \binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}-1\right)(p_{12}-p_1^2).$$

Beweis. In diesem und den folgenden Beweisen dieses Paragraphen lassen wir die Indizes t,s,n,N weg. Für die durch (2.5) definierten Zufallsvariablen T_{ij}, die Zahl der Kanten zwischen zwei Knoten x_i und x_j, gilt

$$P(T_{ij}=\ell) = \binom{t}{\ell} \frac{\binom{t\binom{n}{2}-t}{N-\ell}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \quad \text{für } i\neq j ,$$

denn aus der Belegung zwischen den beiden Knoten x_i und x_j müssen ℓ Kanten gezogen werden und aus den $\binom{n}{2}$-1 anderen Belegungen die N-ℓ restlichen Kanten. Die T_{ij} sind hypergeometrisch verteilt, und wir erhalten weiter aus (2.6) und (4.7) für die Zufallsvariablen U_{ij}

$$P(T_{ij}\geq s) = P(U_{ij}=1) = p_1 \quad \text{für } i\neq j.$$

$$P(T_{i_1j_1}\geq s, T_{i_2j_2}\geq s) = P(U_{i_1j_1}=1, U_{i_2j_2}=1) = P(U_{i_1j_1}\cdot U_{i_2j_2}=1) = p_{12}$$

für $i_1\neq i_2$ oder $j_1\neq j_2$, sowie $i_1\neq j_1$ und $i_2\neq j_2$, folgt analog. Daraus folgt wegen (2.8) für die Verteilungsparameter von V:

$$EV = \sum_{1\leq i<j\leq n} EU_{ij} = \binom{n}{2} EU_{12} = \binom{n}{2} P(U_{12}=1) = \binom{n}{2} p_1 ,$$

$$\begin{aligned} \text{Var } V &= \sum_{1\leq i<j\leq n} \text{Var } U_{ij} + \sum_{\substack{1\leq i_1<j_1\leq n \\ i_1\neq i_2 \text{ oder } j_1\neq j_2}} \sum_{1\leq i_2<j_2\leq n} \text{Cov}(U_{i_1j_1}, U_{i_2j_2}) \\ &= \binom{n}{2} p_1(1-p_1) + \binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}-1\right)(p_{12}-p_1^2) . \end{aligned}$$

Lemma 4.8. Für die Zahlen p_1 und p_{12} gilt die Ungleichung

$$p_{12} < p_1^2 .$$

Beweis. Aus den Definitionen von T_{ij} und U_{ij} und (4.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{12} - p_1^2 &= \text{Cov}(U_{12}, U_{13}) = P(U_{12}=1, U_{13}=1) - P(U_{12}=1)P(U_{13}=1) \\ &= P(U_{12}=1, U_{13}=1)P(U_{12}=0, U_{13}=0) - P(U_{12}=1, U_{13}=0)P(U_{12}=0, U_{13}=1) \\ &= P(T_{12}\geq s, T_{13}\geq s)P(T_{12}<s, T_{13}<s) - P(T_{12}\geq s, T_{13}<s)P(T_{12}<s, T_{13}\geq s) \\ &= \sum_{\tau_1=0}^{s-1} \sum_{\tau_2=s}^{t} \sum_{\tau_3=0}^{s-1} \sum_{\tau_4=s}^{t} \big(P(T_{12}=\tau_2, T_{13}=\tau_4)P(T_{12}=\tau_1, T_{13}=\tau_3) \\ &\qquad - P(T_{12}=\tau_2, T_{13}=\tau_3)P(T_{12}=\tau_1, T_{13}=\tau_4)\big) . \end{aligned}$$

Hinreichend dafür, daß diese Summe negativ ist, ist für bel. natürliche Zahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ zwischen Null und t mit $\tau_1<\tau_2$ und $\tau_3<\tau_4$ die Gültigkeit von

$$P(T_{12}=\tau_2,T_{13}=\tau_4)P(T_{12}=\tau_1,T_{13}=\tau_3) < P(T_{12}=\tau_2,T_{13}=\tau_3)P(T_{12}=\tau_1,T_{13}=\tau_4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{t}{\tau_2}\binom{t}{\tau_4}\frac{\binom{t\binom{n}{2}-2t}{N-\tau_2-\tau_4}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}\binom{t}{\tau_1}\binom{t}{\tau_3}\frac{\binom{t\binom{n}{2}-2t}{N-\tau_1-\tau_3}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}$$

$$< \binom{t}{\tau_2}\binom{t}{\tau_3}\frac{\binom{t\binom{n}{2}-2t}{N-\tau_2-\tau_3}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}\binom{t}{\tau_1}\binom{t}{\tau_4}\frac{\binom{t\binom{n}{2}-2t}{N-\tau_1-\tau_4}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} .$$

Setzen wir abkürzend $t\binom{n}{2}-2t =: a, \tau_2 =: \tau_1+b$, $\tau_4 =: \tau_3+c$ und $N-\tau_1-\tau_3 =: d$ $(a,b,c,d>0)$, so erhalten wir durch einfache Rechnung, daß diese letzte Ungleichung äquivalent ist zu

$$(a-d+b)^{[b]}\cdot(d-c)^{[b]} < (a-d+b+c)^{[b]}\cdot d^{[b]} ;$$

diese Ungleichung ist richtig. Somit gilt die Behauptung des Lemmas.]

Anmerkung 4.4. Da die Ungleichungen im obigen Beweis für jede erlaubte Wahl $\tau_1<\tau_2$ und $\tau_3<\tau_4$ gelten und nicht an die Bedingung $\tau_1<s\leq\tau_2$, $\tau_3<s\leq\tau_4$ für gegebenes s gebunden sind, haben wir sogar allgemeiner gezeigt:

$$P(T_{12}\geq s_1,T_{13}\geq s_2)P(T_{12}<s_1,T_{13}<s_2) < P(T_{12}\geq s_1,T_{13}<s_2)P(T_{12}<s_1,T_{13}\geq s_2) .$$

für bel. Zahlen s_1 und s_2 zwischen Null und t. Das ist die bekannte negative Quadrantenabhängigkeit der multiplen hypergeometrischen Verteilung. (Ein Induktionsbeweis dieser negativen Quadrantenabhängigkeit, der von Kesten stammt, wird in Lehmann (1966, Example 4) zitiert.)

Wegen Lemma 4.8 können wir aus (4.8.1) und (4.8.2) den folgenden Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert und der Varianz der Zahl der s-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ herleiten.

Korollar 4.9. Für Erwartungswert und Varianz der Zahl der s-gesättigten Belegungen gilt die Ungleichung

(4.8.3) $\quad EV_{t,s,n,N} > \operatorname{Var} V_{t,s,n,N}$.

Mit denselben Oberlegungen wie zu den Sätzen über Verteilung und Verteilungsparameter der Zahl der s-gesättigten Belegungen erhalten wir für die Anzahl der mit einem gegebenen Knoten x_i s-verbundenen Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ die anschließend genannten Ergebnisse.

Satz 4.10. Es gilt für den s-Grad eines gegebenen Knotens x_i in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$

$$(4.9) \qquad P(U_{t,s,n,N,i}=u) = \binom{n-1}{u} \sum_{\lambda} \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N-\lambda}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \tilde{K}_{t,s,u,n-1-u,\lambda} .$$

Beweis. Von den n-1 Belegungen zwischen x_i und den übrigen Knoten des Multigraphen können u ausgewählt werden, die s-gesättigt sein sollen. Dann zieht man λ Kanten so aus den n-1 Belegungen, daß diese u s-gesättigt sind und die n-1-u anderen nicht. Die N-λ restlichen Kanten werden aus den $\binom{n-1}{2}$ noch verbliebenen Belegungen zwischen den n-1 übrigen Knoten beliebig gezogen. Summation über λ liefert die Behauptung.]

Satz 4.11. Seien p_1 und p_{12} durch (4.7) gegeben. Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz der Zahl der mit einem Knoten x_i s-verbundenen Knoten

$$(4.10.1) \qquad EU_{t,s,n,N,i} = (n-1)p_1 ,$$

$$(4.10.2) \qquad \text{Var } U_{t,s,n,N,i} = (n-1)p_1(1-p_1) + (n-1)(n-2)(p_{12}-p_1^2),$$

$$(4.10.3) \qquad EU_{t,s,n,N,i} > \text{Var } U_{t,s,n,N,i} .$$

Der Quotient $P(T_{t,s,n,N_2,i,j}=\ell)/P(T_{t,s,n,N_1,i,j}=\ell)$ ist für $N_1<N_2$ monoton wachsend in ℓ. D.h. die durch $P(T_{t,s,n,N,i,j}=\ell)$ gegebenen hypergeometrischen Verteilungen bilden bzgl. des Parameters N eine Klasse von Verteilungen mit monotonem Dichtequotienten in ℓ. Nach einem bekannten Resultat aus der Statistik (vgl. Witting (1968,Satz 2.31)) gilt dann auch $P(T_{t,s,n,N_1,i,j}\geq s) \leq P(T_{t,s,n,N_2,i,j}\geq s)$ (wobei nicht immer "=" gilt), d.h.

$$(4.8.4) \qquad EV_{t,s,n,N_1} < EV_{t,s,n,N_2} \qquad \text{für } N_1 < N_2,$$

$$(4.10.4) \qquad EU_{t,s,n,N_1,i} < EU_{t,s,n,N_2,i} \text{ für } N_1 < N_2.$$

4.3. Die Eigenschaft C_k^s

Wir sagen, daß ein ungerichteter, vollständig indizierter Multigraph die Eigenschaft C_k^s besitzt, wenn er aus genau einer s-Komponenten und k s-isolierten Knoten besteht, k=0,1,2,.... Sei $C^s = \bigcup_k C_k^s$. Da s-isolierte Knoten lt. Def. 1.8 auch s-Komponenten der Größe 1 sind, ist zweierlei zu beachten: Für $n \geq 2$ besitzt kein Multigraph $\Gamma_{t,n,N}$ die Eigenschaft C_{n-1}^s, also $P_{t,n,N}(C_{n-1}^s)=0$. Für n=1 soll $C_{1-1}^s=C_0^s$ heißen, daß $\Gamma_{t,1,0}$ s-zusammenhängend ist. Das ist lt. Def. 1.7 richtig. Ebenso enthält dieser Multigraph einen s-isolierten Knoten. Hier muß also gelten

$$P_{t,1,0}(C_0^s) = P_{t,1,0}(C_1^s) = 1.$$

Sei $C_{t,s,n,N}$ die Zahl der Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$, die s-zusammenhängend sind, also $P_{t,n,N}(C_0^s) = C_{t,s,n,N} / \binom{t\binom{n}{2}}{N} \cdot C_{t,s,n,N}$ können wir jetzt berechnen mit Hilfe der durch Lemma 4.5 gegebenen Zahlen $\tilde{K}_{t,s,v_1,v_2,\mu}$ und der in Paragraph 3.2 eingeführten Zahlen $C_{n,N}$ der einfachen Graphen $\Gamma_{n,N}$, die zusammenhängend sind. Denn besitzt ein Multigraph mit n Knoten genau v s-gesättigte Belegungen, so gibt $C_{n,v}$ wegen Paragraph 2.3 die Zahl der Möglichkeiten an, auf die diese Belegungen zwischen den Knoten gewählt werden können, so daß der Multigraph s-zusammenhängend ist.

Satz 4.12. Seien $n,N \in \mathbb{N}_0$, $t,s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s \leq t$ und $s(n-1) \leq N \leq t\binom{n}{2}$. Dann gilt für die Zahl der Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$, die s-zusammenhängend sind,

$$C_{t,s,n,N} = \sum_{v=n-1}^{\binom{n}{2}} C_{n,v} \tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N} \quad ; \tag{4.11}$$

dabei sind die $C_{n,v}$ durch (3.1.1) bzw. (3.1.2) gegeben und die $\tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N}$ durch (4.5). Außerhalb des o.a. Bereiches ist $C_{t,s,n,N}=0$.

Beweis. (a) Wegen Anmerkung 3.1 ist $C_{t,s,0,0}=1$ und $C_{t,s,0,N}=0$ für $N \neq 0$. Für n=1 ist $C_{t,s,1,0}=1$ und $C_{t,s,1,N}=0$ $(N \neq 0)$ in Übereinstimmung mit dem oben gesagten.

(b) Sei $n \geq 2$. Bei festem v ziehen wir die N Kanten so aus den $\binom{n}{2}$ Belegungen des Multigraphen, daß v gegebene Belegungen s-gesättigt sind.

Das gibt $\tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N}$ Möglichkeiten des Kantenziehens. Achten wir dabei noch darauf, daß mit diesen v Belegungen $\Gamma_{t,n,N}$ s-zusammenhängend wird, so haben wir noch $C_{n,v}$ Möglichkeiten der Auswahl der v Belegungen. Summation über v liefert die Behauptung. Wie ebenfalls aus Anmerkung 3.1 folgt, muß $v \geq n-1$ gelten, damit $\Gamma_{t,n,N}$ überhaupt s-zusammenhängend sein kann. Das impliziert, daß für $N < s(n-1)$ immer $C_{t,s,n,N} = 0$ gelten muß.]

Die folgende Abschätzung ist trivial für $n \geq 2$. Für n=1 gilt sie nicht, da $\Gamma_{t,1,0}$ immer einen s-isolierten Knoten enthält.

Lemma 4.13. Für $n \geq 2$ gilt die Abschätzung

$$(4.12) \qquad 0 \leq P_{t,n,N}(C_k^s) \leq P(Y^*_{t,s,n,N,1} = k).$$

Sei G* eine gegebene m-elementige Teilmenge der Knotenmenge eines Multigraphen $\Gamma_{t,n,N} = (G,H)$; sei $H^* = H \cap (G^* \times G^* \times \{1,\dots,t\})$ und $|H^*| = \mu$. Dann ist $C_{t,s,m,\mu}$ die Zahl der Möglichkeiten, daß die μ Kanten für H* so zwischen den Knoten aus G* gezogen wurden, daß der Teilgraph $\Gamma_{t,m,\mu} = (G^*,H^*)$ s-zusammenhängend ist. Damit können wir unter Zuhilfenahme des Ergebnisses (4.11) die folgende Formel für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Ereignisses C_k^s bei allgemeinem k beweisen.

Satz 4.14. Sei $n \geq 2$. Für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N}$ genau eine s-Komponente der Größe n-k besitzt und sonst nur noch k s-isolierte Knoten (k=0,1,2,…,n-2,n), gilt

$$(4.13.1) \qquad P_{t,n,N}(C_k^s) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \sum_{\mu} C_{t,s,n-k,\mu} K_{t,s-1,k(n-\frac{1}{2}(k+1)),N-\mu};$$

dabei sind die Koeffizienten sowie der Summationsbereich für μ, innerhalb dessen diese Koeffizienten positiv sind, gegeben durch Lemma 4.1 und Satz 4.12. Weiter ist für $k=n-1>0$

$$(4.13.2) \qquad P_{t,n,N}(C_{n-1}^s) = 0.$$

Für n=1 und n=0 gilt dagegen

$$(4.13.3) \qquad P_{t,1,0}(C_0^s) = P_{t,1,0}(C_1^s) = P_{t,0,0}(C_0^s) = 1.$$

Beweis. (a) Die Formeln (4.13.2) und (4.13.3) (für n=1) wurden zu Beginn dieses Paragraphen erklärt. (4.13.3) für n=0 folgt aus (4.11).

(b) Sei $n \geq 2$ und $k \neq n-1$. Aus den n Knoten können k ausgewählt werden, die s-isoliert sein sollen. Bei festem μ werden μ Kanten so zwischen den n-k übrigen Knoten gezogen, daß diese eine s-Komponente bilden. Dafür gibt es $C_{t,s,n-k,\mu}$ Möglichkeiten des Kantenziehens. Die k(n-k) Belegungen von dieser s-Komponenten zu den k anderen Knoten sowie die $\binom{k}{2}$ Belegungen zwischen diesen k Knoten dürfen nicht s-gesättigt sein. D.h. die noch zu ziehenden N-μ übrigen Kanten dürfen aus diesen zusammen $\binom{k}{2}+k(n-k) = k(n-\frac{1}{2}(k+1))$ Belegungen auf $K_{t,s-1,k(n-\frac{1}{2}(k+1)),N-\mu}$ Möglichkeiten gezogen werden. Das gibt die Behauptung. ⌋

Anmerkung 4.5. Besitzt ein Multigraph $\Gamma_{t,n,N}$ die Eigenschaft C_n^s, so heißt das, daß alle seine Knoten s-isoliert sind. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ergibt sich wegen $C_{t,s,0,0}=1$ aus Satz 4.14 in Übereinstimmung mit der Definition der Zahlen $K_{t,s,v,\mu}$ zu

$$P_{t,n,N}(C_n^s) = P(Y^*_{t,s,n,N,1}=n) = \frac{1}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,s-1,\binom{n}{2},N}\,.$$

Wegen $C_{t,s,1,0}=1$ würde aus (4.13.1) für k=n-1 formal folgen:

$$P_{t,n,N}(C_{n-1}^s) = \frac{n}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,s-1,\binom{n}{2},N}\,.$$

Der rechts stehende Ausdruck kann Werte annehmen, die größer als 1 sind. Man errechnet z.B. für t=s=1, n=3 und N=0 aus dieser letzten Formel $P_{1,3,0}(C_2^1) = 3 > 1$. Um solche Widersprüche zu vermeiden, muß der Sonderfall k=n-1 explizit in Satz 4.14 aufgenommen werden.

Anmerkung 4.6. Beachten wir die Reihenfolge beim Ziehen der Kanten und bezeichnen mit $C^*_{t,s,n,N}$ die Zahl der Möglichkeiten, erst beim N-ten Zug einer Kante einen s-zusammenhängenden Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ zu erhalten, so gilt

$$\begin{aligned} N!\cdot C_{t,s,n,N} &= (N-1)!\left(t\tbinom{n}{2}-(N-1)\right)C_{t,s,n,N-1} + C^*_{t,s,n,N} \\ &\geq (N-1)!\left(t\tbinom{n}{2}-(N-1)\right)C_{t,s,n,N-1}\,, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P_{t,n,N}(C_0^S) \geq \frac{t\binom{n}{2}-(N-1)}{N} \frac{C_{t,s,n,N-1}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} = P_{t,n,N-1}(C_0^S) .$$

Es läßt sich also allgemein sagen

$$P_{t,n,N_2}(C_0^S) \geq P_{t,n,N_1}(C_0^S) \quad \text{für} \quad N_2 > N_1 .$$

Mit derselben Argumentation beweist man auch die Gültigkeit von

$$P_{t,n,N_2}\left(\bigcup_{j=0}^{k} C_j^S\right) \geq P_{t,n,N_1}\left(\bigcup_{j=0}^{k} C_j^S\right) \quad \text{für } N_2 > N_1 .$$

4.4. Ergebnisse für die Zufallsvariable "Anzahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$"

4.4.1. Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen "Anzahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$"

Mit Hilfe der Ergebnisse aus den beiden Paragraphen 4.1 und 4.3 können wir die folgenden Formeln für die Verteilungsparameter der Zufallsvariablen $Y^*_{t,s,n,N,m}$, die die Zahl der s-Komponenten der Größe m in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ angibt, beweisen.

Satz 4.15. Es gilt für den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen "Anzahl der s-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$"

$$(4.14.1)\quad EY^*_{t,s,n,N,m} = \binom{n}{m} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-m}{2}}{N-\mu-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,s,m,\mu} K_{t,s-1,m(n-m),\nu} ;$$

$$(4.14.2)\quad \operatorname{Var} Y^*_{t,s,n,N,m} = EY^*_{t,s,n,N,m} - (EY^*_{t,s,n,N,m})^2 + \binom{n}{m}\binom{n-m}{m} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-2m}{2}}{N-\lambda-\mu-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,s,m,\lambda} C_{t,s,m,\mu} K_{t,s-1,m(2n-3m),\nu} .$$

Dabei sind die Koeffizienten $C_{t,s,m,\lambda}$ und $K_{t,s-1,\nu,\nu}$ sowie die Summationsbereiche für λ, μ und ν, innerhalb derer diese Koeffizienten positive Werte annehmen, durch Lemma 4.1 und Satz 4.12 gegeben.

Beweis. (a) Sei $A_i^{s,m}$ das Ereignis, daß der Knoten x_i eines Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N} = (G,H)$ in einer s-Komponenten der Größe m liegt. Weiter sei $B_{i,j}^{s}$ das Ereignis, daß die Knoten x_i und x_j in derselben s-Komponenten liegen. Dann gilt

$$(4.15.1)\quad P_{t,n,N}(A_i^{s,m}) = \binom{n-1}{m-1} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-m}{2}}{N-\mu-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,s,m,\mu} K_{t,s-1,m(n-m),\nu} .$$

Denn von n-1 Knoten in G können noch m-1 ausgewählt werden, die zusammen mit x_i eine s-Komponente der Größe m bilden sollen. Das gibt $\binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten der Auswahl. Seien nun μ und ν fest. μ der N Kanten von H werden zur Bildung der s-Komponente aus den Belegungen zwischen diesen Knoten benötigt. Aus den m(n-m) Belegungen zwischen den Knoten dieser s-Komponente und den n-m restlichen Knoten dürfen ν Kanten für die Kantenmenge H so gezogen werden, daß keine dieser Belegungen s-gesättigt ist (sonst würde diese s-Komponente mehr als m Knoten enthalten). Die $N-\mu-\nu$ übrigen Kanten dürfen bel. aus den Belegungen zwischen den n-m Knoten gezogen werden. Das gibt

$$C_{t,s,m,\mu} \cdot K_{t,s-1,m(n-m),\nu} \cdot \binom{t\binom{m-n}{2}}{N-\mu-\nu}$$

Möglichkeiten des Kantenziehens. Summation über μ und ν liefert (4.15.1). Genauso ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Knoten x_i und x_j in derselben s-Komponenten der Größe m liegen, zu

$$(4.15.2)\quad P_{t,n,N}(A_i^{s,m} \cap A_j^{s,m} \cap B_{i,j}^{s}) = \binom{n-2}{m-2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-m}{2}}{N-\mu-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,s,m,\mu} K_{t,s-1,m(n-m),\nu} \cdot$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Knoten x_i und x_j in zwei verschiedenen s-Komponenten der Größe m liegen, ergibt sich zu

$$(4.15.3)\quad P_{t,n,N}(A_i^{s,m} \cap A_j^{s,m} \cap \bar{B}_{i,j}^{s}) = \binom{n-2}{m-1} \binom{n-m-1}{m-1} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-2m}{2}}{N-\lambda-\mu-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,s,m,\lambda} C_{t,s,m,\mu} K_{t,s-1,m(2n-3m),\nu} \cdot$$

Denn seien die beiden Knoten x_i und x_j ausgewählt. Zu x_i können noch m-1 Knoten aus den n-2 verbliebenen ausgewählt werden, die mit x_i eine s-Komponente der Größe m bilden sollen; und zu x_j können ebenso m-1 Knoten für die zweite s-Komponente ausgesucht werden. $C_{t,s,m,\lambda}$ Möglichkeiten gibt es, λ Kanten aus den Belegungen zwischen den Knoten der ersten m-elementigen Teilmenge von G zu ziehen, so daß sie eine s-Komponente bildet. Entsprechend gibt es $C_{t,s,m,\mu}$ Möglichkeiten, μ Kanten zur Bildung der zweiten s-Komponenten der Größe m zu ziehen. Aus den

m^2 Belegungen zwischen den beiden s-Komponenten und den $2m(n-2m)$ Belegungen, die von den beiden s-Komponenten zu den restlichen n-2m Knoten gehen, seien ν Kanten gezogen, so daß keine dieser insgesamt $m^2 + 2m(n-2m) = m(2n-3m)$ Belegungen s-gesättigt ist. Das gibt $K_{t,s-1,m(2n-3m),\nu}$ Möglichkeiten des Kantenziehens. Die restlichen $N-\lambda-\mu-\nu$ Kanten können beliebig aus den $\binom{n-2m}{2}$ Belegungen zwischen den n-2m Knoten gezogen werden. Daraus ergibt sich (4.15.3).

(b) Da die Indizes t,s,n,N,m hier fest vorgegeben sind, lassen wir sie für den Rest des Beweises weg. Nach Definition der Zufallsvariablen Y^* und X_i^* gilt

$$EY^* = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right) = n\,EX_1^* = \frac{n}{m}\,P(A_1^{s,m}).$$

Das ist wegen (4.15.1) und $\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m}$ gleichbedeutend mit (4.14.1).

(c) Für die Varianz gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} Y^* &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{*2}\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} X_i^* X_j^*\right) - (EY^*)^2 \\ &= n\,EX_1^{*2} + n(n-1)E(X_1^*X_2^*) - (EY^*)^2 \\ &= \frac{n}{m^2}\,P(A_1^{s,m}) + \frac{n(n-1)}{m^2}\left(P(A_1^{s,m}\cap A_2^{s,m}\cap B_{12}^{s}) + P(A_1^{s,m}\cap A_2^{s,m}\cap \overline{B}_{12}^{s})\right) - (EY^*)^2.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (4.15.1) - (4.15.3) für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich aus der letzten Formel unmittelbar (4.14.2) wegen $\left(n\binom{n-1}{m-1} + n(n-1)\binom{n-2}{m-2}\right)/m^2 = \binom{n}{m}$ und $n(n-1)\binom{n-2}{m-1}\binom{n-m-1}{m-1}/m^2 = \binom{n}{m}\binom{n-m}{m}$. ⌋

Formeln für die Verteilung der Zufallsvariablen $Y^*_{t,s,n,N,m}$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl der s-Komponenten der Größe m in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ einen bestimmten Wert k annimmt, werden in diesem Paragraphen nicht hergeleitet. Solche Formeln scheinen, wie bereits erwähnt, nicht einmal für einfache Zufallsgraphen (t=s=1) bekannt zu sein.

Der für die weitere Theorie interessanteste Spezialfall, nämlich m=1, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

4.4.2. Der Fall m=1: Die Verteilung der Zufallsvariablen "Zahl der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$"

Die durch (3.2) definierte Zahl $L_{n,v}$ bedeutet ebenfalls die Zahl der Multigraphen mit n Knoten und v s-gesättigten Belegungen, die keine s-isolierten Knoten enthalten. Entsprechend gibt dann $L_{n-k,v}$ die Zahl der Möglichkeiten an, daß in einem Multigraphen mit n Knoten und v s-gesättigten Belegungen alle diese Belegungen so zwischen n-k ausgewählten Knoten liegen, daß nur die k anderen Knoten s-isoliert sind. Somit können wir mit Satz 3.5 und Lemma 4.5 die Verteilung der Zahl der s-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ berechnen. Wegen

$$(2.13) \qquad Y^*_{t,s,n,N,1} = n - Y_{t,s,n,N}$$

ist dann wieder die Verteilung der nicht s-isolierten Knoten bekannt. Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.16. Seien $t,s,n \in \mathbb{N}$ und $N,k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq s \leq t$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq N \leq t\binom{n}{2}$. Dann ergibt sich die Verteilung der Zahl der s-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ zu

$$(4.16) \qquad P(Y^*_{t,s,n,N,1}=k) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \sum_{v=\{\frac{1}{2}(n-k)\}}^{\binom{n-k}{2}} L_{n-k,v}\, \tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N}\,.$$

Dabei sind $L_{n-k,v}$ bzw. $\tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N}$ gegeben durch (3.2) bzw. (4.5).

Die Durchführung des Beweises zu diesem Satz unterscheidet sich nach dem oben gesagten nur in Details von der Beweisführung zu Satz 4.12. Deshalb kann hier auf eine Angabe verzichtet werden.

Aus (4.16) folgt direkt $P(Y^*_{t,s,n,N,1}=n-1)=0$, weil zum einen $L_{1N}=0$ für alle N gilt und zum andern bei k=n-1 die Summationsgrenzen für v lauten: $1 \leq v \leq 0$. Für k=n liefert (4.16) natürlich dieselbe Formel wie (4.13.1).

Der nächste Satz über Erwartungswert und Varianz von $Y^*_{t,s,n,N,1}$ folgt wegen $C_{t,s,1,0}=1$ und $C_{t,s,1,\mu}=0$ für $\mu \neq 0$ aus Satz 4.15.

Korollar 4.17. Für den Erwartungswert und die Varianz der Zahl der s-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ gilt

$$(4.17.1)\quad EY^*_{t,s,n,N,1} = n \sum_{\nu=0}^{(s-1)(n-1)} \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,s-1,n-1,\nu},$$

$$(4.17.2)\quad \operatorname{Var} Y^*_{t,s,n,N,1} = EY^*_{t,s,n,N,1} - (EY^*_{t,s,n,N,1})^2 + n(n-1) \sum_{\nu=0}^{(s-1)(2n-3)} \frac{\binom{t\binom{n-2}{2}}{N-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,s-1,2n-3,\nu}.$$

Die Formel (4.17.1) ergibt sich außerdem auch wegen

$$EY^*_{t,s,n,N,1} = n\,P(X^*_{t,s,n,N,1,1}=1) = n\,P(U_{t,s,n,N,1}=0)$$

direkt aus (4.9) (vgl. die Definitionen der Zufallsvariablen in Paragraph 2.2); denn ein Knoten ist genau dann s-isoliert, wenn die Zahl der mit ihm s-verbundenen Knoten den Wert 0 annimmt.

Anmerkung 4.7. Mit denselben Überlegungen wie in Anmerkung 4.6 läßt sich die Gültigkeit von

$$P(Y^*_{t,s,n,N_1,1} \leq k) \geq P(Y^*_{t,s,n,N_2,1} \leq k) \quad \text{für } N_1 < N_2$$

beweisen. Daraus folgt

$$(4.17.3)\quad EY^*_{t,s,n,N_1,1} \geq EY^*_{t,s,n,N_2,1} \quad \text{für } N_1 < N_2.$$

Die in (4.8.4), (4.10.4) und den Anmerkungen 4.6 und 4.7 dargestellten Sachverhalte, daß bei zwei Zufallsmultigraphen Γ_{t,n,N_1} und Γ_{t,n,N_2} mit $N_1<N_2$ der Erwartungswert der Zahl der s-gesättigten Belegungen, des s-Grades eines Knotens x_i und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zufallsmultigraph s-zusammenhängend ist, für Γ_{t,n,N_2} nicht kleiner ist als für Γ_{t,n,N_1}, sind naturgemäß zu erwarten. Ebenso würde man auch sofort als richtig ansehen, daß der Erwartungswert der Zahl der s-isolierten Knoten in Γ_{t,n,N_2} nicht größer sein darf als in Γ_{t,n,N_1}.

4.5. Ergebnisse für den Sonderfall s=1

Die in diesem Paragraphen angegebenen Ergebnisse bilden die Grundlage für die Beweise der Grenzwertsätze des Paragraphen 5.2, in dem Resultate für das asymptotische Verhalten von Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ bei s=1, $n\to\infty$ und N=N(n) hergeleitet werden. Die Sätze, die nachfolgend in 4.5 sowie in 4.6 angegeben werden, ergeben sich durch einfache Rechnungen aus den Ergebnissen der vorangegangenen Paragraphen.

Die Zufallsvariable $V_{t,1,n,N}$ gibt die Zahl der Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$ an, aus denen mindestens eine Kante für die Kantenmenge des Zufallsmultigraphen gezogen wurde. Aus Satz 4.6 und der Definition von $\tilde{K}_{t,1,v_1,v_2,\mu}$ (vgl. Anmerkung 4.3) folgt für die Verteilung von $V_{t,1,n,N}$ dieses Resultat.

Korollar 4.18. Es gilt für die Verteilung der Anzahl der Belegungen in $\Gamma_{t,n,N}$, aus denen mindestens eine Kante gezogen wurde,

$$(4.18)\qquad P(V_{t,1,n,N}=v) = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{v}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K^*_{t,1,v,N};$$

dabei ist $K^*_{t,1,v,N}$ durch (4.4.2) gegeben.

Aus Satz 4.10 ergibt sich entsprechend eine Formel für die Verteilung von $U_{t,1,n,N,i}$, der Zahl der mit einem Knoten x_i 1-verbundenen anderen Knoten des Zufallsmultigraphen. Auf eine Angabe dieser Formel sei hier verzichtet, ebenso wie auf die Angabe der Verteilungsparameter von $V_{t,1,n,N}$ und $U_{t,1,n,N,i}$, da sich für diese keine Vereinfachungen gegenüber den Sätzen aus Paragraph 4.2 ergeben.

Aus Satz 4.12 ergibt sich für die Zahl der 1-zusammenhängenden Multigraphen das folgende Resultat.

Korollar 4.19. Die Zahl der 1-zusammenhängenden Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ ist gegeben durch

$$(4.19)\qquad C_{t,1,n,N} = \sum_v C_{n,v}\, K^*_{t,1,v,N}.$$

Dabei sind die Koeffizienten durch (3.1) bzw. (4.4.2) gegeben.

Satz 4.14 liefert das folgende Resultat über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N}$ genau eine 1-Komponente der Größe n-k enthält und sonst nur k 1-isolierte Knoten.

Korollar 4.20. Es gilt für $n \geq 2$ und $k=0,1,\ldots,n-2,n$

$$(4.20.1)\quad P_{t,n,N}(C_k^1) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,1,n-k,N}$$

bzw.

$$(4.20.2)\quad P_{t,n,N}(C_k^1) = \binom{n}{k} \frac{\binom{t\binom{n-k}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} P_{t,n-k,N}(C_0^1).$$

Betrachten wir nun die Zufallsvariable "Zahl der 1-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$". Für allgemeines m folgt wegen Satz 4.15 das nachstehende Ergebnis sofort.

Korollar 4.21. Es gilt für die Verteilungsparameter der Zahl der 1-Komponenten der Größe m in $\Gamma_{t,n,N}$

$$(4.21.1)\quad EY^*_{t,1,n,N,m} = \binom{n}{m} \sum_{\mu} \frac{\binom{t\binom{n-m}{2}}{N-\mu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,1,m,\mu},$$

$$(4.21.2)\quad \mathrm{Var}\, Y^*_{t,1,n,N,m} = EY^*_{t,1,n,N,m} - (EY^*_{t,1,n,N,m})^2 + \binom{n}{m}\binom{n-m}{m} \sum_{\lambda}\sum_{\mu} \frac{\binom{t\binom{n-2m}{2}}{N-\lambda-\mu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{t,1,m,\lambda}\, C_{t,1,m,\mu}.$$

Wichtig ist der Spezialfall m=1. Für die Verteilung sowie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen $Y^*_{t,1,n,N,1}$ ergeben sich aus den bisherigen Formeln die folgenden Beziehungen. (Wegen (2.13) ergeben sich wieder für $Y_{t,1,n,N}$ analoge Formeln durch einfache Substitution.)

Satz 4.22. Es gilt für die Verteilung der Anzahl der 1-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$

$$(4.22.1)\quad P(Y^*_{t,1,n,N,1}=k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{t\binom{n-k-j}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}$$

bzw.

$$(4.22.2)\quad P(Y^*_{t,1,n,N,1}=k) = \binom{n}{k} \frac{\binom{t\binom{n-k}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} P(Y^*_{t,1,n-k,N,1}=0).$$

Erwartungswert und Varianz sind gegeben durch

$$(4.23.1)\quad EY^*_{t,1,n,N,1} = n \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}},$$

$$(4.23.2)\quad \operatorname{Var} Y^*_{t,1,n,N,1} = n \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \left\{ 1 - n \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \right\} + n(n-1) \frac{\binom{t\binom{n-2}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}.$$

Beweis. Während die Formeln für Erwartungswert und Varianz triviale Folgerungen aus Korollar 4.21 sind, ergibt sich (4.22.1) wie folgt. Wegen Anmerkung 4.3 und (3.2) folgt aus (4.16)

$$P(Y^*_{t,1,n,N,1}=k) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \sum_{v} L_{n-k,v}\, K^*_{t,1,v,N}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \sum_{j} (-1)^j \binom{n-k}{j} \sum_{v} \binom{\binom{n-k-j}{2}}{v} K^*_{t,1,v,N}.$$

Wegen Lemma 4.4 ergibt sich daraus (4.22.1). (4.22.2) ist trivial.⌋

Setzt man in (4.23.1) und (4.23.2) des letzten Satzes $a = t\binom{n}{2}$, $b = t\binom{n-1}{2}$ und $d = t\binom{n-2}{2}$, so kann man für $N \leq d$ wegen

$$\frac{\binom{b}{N}}{\binom{a}{N}} \geq \frac{\binom{d}{N}}{\binom{b}{N}} \Leftrightarrow \frac{b^{[N]}}{a^{[N]}} \geq \frac{d^{[N]}}{b^{[N]}} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{n-1}{\binom{n}{2}} \leq \frac{n-2}{\binom{n-1}{2}} \Leftrightarrow n \geq n-1$$

leicht zeigen, daß zwischen Erwartungswert und Varianz der Zahl der 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ die folgende Beziehung gilt:

(4.23.3) $\quad EY^*_{t,1,n,N,1} \geq \operatorname{Var} Y^*_{t,1,n,N,1}$.

Anmerkung 4.8. Mit Hilfe der in Paragraph 2.3 dargestellten Analogie zwischen s-gesättigten Belegungen eines Multigraphen und Kanten eines einfachen Graphen läßt sich die Gültigkeit von (4.23.3) auch bei allgemeinem s nachweisen. Hat ein Zufallsmultigraph genau v s-gesättigte Belegungen, so gilt nämlich für den Erwartungswert der Zahl der s-isolierten Knoten nach (4.23.1)

$$E(Y^*_{t,s,n,N,1} | V_{t,s,n,N}=v) = n \frac{\binom{\binom{n-1}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}} = EY^*_{1,1,n,v,1}$$

wegen der vorausgesetzten Gleichwahrscheinlichkeit für das Kantenziehen. D.h. dieser Erwartungswert ist gleich dem Erwartungswert der Zahl der isolierten Knoten in einem einfachen Zufallsgraphen $\Gamma_{n,v}$. Entsprechend gilt auch $\operatorname{Var}(Y^*_{t,s,n,N,1} | V_{t,s,n,N}=v) = \operatorname{Var} Y^*_{1,1,n,v,1}$. Wegen (4.23.3) ist $EY^*_{1,1,n,v,1} \geq \operatorname{Var} Y^*_{1,1,n,v,1}$ richtig für alle v. Also gilt

(4.23.4) $\quad EY^*_{t,s,n,N,1} = EE(Y^*_{t,s,n,N,1} | V_{t,s,n,N})$
$\qquad\qquad \geq E\operatorname{Var}(Y^*_{t,s,n,N,1} | V_{t,s,n,N}) = \operatorname{Var} Y^*_{t,s,n,N,1}$

auch für bel. s $(1 \leq s \leq t)$.

4.6. Ergebnisse für die Sonderfälle s=2 und s=t

Im nächsten Korollar geben wir den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der 2-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen an. Auf eine Wiedergabe weiterer Formeln, etwa für $EY^*_{t,2,n,N,m}$ und $\mathrm{Var}\, Y^*_{t,2,n,N,m}$ bei allgemeinem m, wird verzichtet, da sie keine Vereinfachung gegenüber den entsprechenden Ausdrücken aus den Paragraphen 4.2 - 4.4 darstellen. Wegen (4.2.2) und Korollar 4.17 gilt der folgende Satz.

Korollar 4.23. Der Erwartungswert und die Varianz der Zahl der 2-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ berechnen sich zu

$$(4.24.1)\quad EY^*_{t,2,n,N,1} = n \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} t^\nu ,$$

$$(4.24.2)\quad \mathrm{Var}\, Y^*_{t,2,n,N,1} = EY^*_{t,2,n,N,1} - (EY^*_{t,2,n,N,1})^2 + n(n-1) \sum_{\nu=0}^{2n-3} \binom{2n-3}{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-2}{2}}{N-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} t^\nu .$$

Nachdem wir im letzten Paragraphen den Extremfall s=1 behandelt haben, wenden wir uns jetzt dem anderen Extrem, nämlich s=t, zu. Wir nennen zwei Knoten eines Multigraphen jetzt also erst dann (t-) verbunden, wenn alle t Elemente der Belegung zwischen ihnen in der Kantenmenge dieses Multigraphen liegen. Unter Benutzung von Anmerkung 4.3 erhalten wir aus Korollar 4.6 das folgende Resultat für die Verteilung der Zufallsvariablen $V_{t,t,n,N}$.

Korollar 4.24. Es gilt für die Zahl der t-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$

$$(4.25)\quad P(V_{t,t,n,N}=\nu) = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,t-1,\binom{n}{2}-\nu,N-t\nu} .$$

Für die Zahl der mit x_i t-verbundenen Knoten ergibt sich aus Satz 4.10 entsprechend eine einfachere Formel.

In den Ausdrücken (4.8.1) und (4.8.2) bzw. (4.10.1) und (4.10.2) für den Erwartungswert und die Varianz dieser beiden Variablen berechnen sich die durch p_1 und p_{12} definierten Wahrscheinlichkeiten für s=t zu

$$(4.26) \qquad p_1 = \frac{\binom{t\binom{n}{2}-t}{N-t}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}}, \; p_{12} = \frac{\binom{t\binom{n}{2}-2t}{N-2t}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} .$$

Aus Satz 4.12 erhalten wir für die Zahl der t-zusammenhängenden Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ dieses Korollar.

Korollar 4.25. Es gilt

$$(4.27) \qquad C_{t,t,n,N} = \sum_{v} C_{n,v} \, K_{t,t-1,\binom{n}{2}-v,N-tv} .$$

Formeln für Erwartungswert und Varianz von $Y^*_{t,t,n,N,m}$ liefern keine Vereinfachungen gegenüber den allgemeinen Resultaten aus Paragraph 4.4; jedoch berechnet sich die Verteilung der Zahl der t-isolierten Knoten etwas einfacher.

Korollar 4.26. Es gilt für die Verteilung der Zahl der t-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen

$$(4.28) \qquad P(Y^*_{t,t,n,N,1}=k) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \; L_{n-k,v} \, K_{t,t-1,\binom{n}{2}-v,N-tv}$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \sum_{v} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{v}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,t-1,\binom{n}{2}-v,N-tv} .$$

4.7. Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels

Aus der Definition von $\Gamma_{t,n,N}$ in Paragraph 1.1 und aus dem Wahrscheinlichkeitsmodell in 2.1 ist ersichtlich, daß für t=s=1 einfache Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N}$ mit n Knoten und N zufällig ausgewählten Kanten vorliegen. Das Modell 3 von Erdös und Rényi aus Paragraph 3.1 folgt also, wie bereits erwähnt, als Sonderfall aus dem von uns definierten allgemeineren Wahrscheinlichkeitsmodell. Die in den Sätzen 4.10 und 4.11 und in den Paragraphen 4.3 - 4.6 (hier für s=t) genannten Ergebnisse sind somit Verallgemeinerungen von Resultaten für indizierte ungerichtete Zufallsgraphen auf die in dieser Arbeit definierten ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen. Z.B. enthält Satz 4.22 als Sonderfall t=1 die in Korollar 3.6 und Satz 3.7 angegebenen Resultate. (Satz 4.22 läßt sich auch unabhängig von der Theorie des Paragraphen 4.4 beweisen; (4.22.1) z.B. leitet man dann mit Hilfe der Formel von Sylvester (3.4) her.)

Für die Wahrscheinlichkeit, daß alle Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ s-isoliert sind, ergibt sich aus den Sätzen 4.14 bzw. 4.16

$$P(Y^*_{t,s,n,N,1}=n) = \frac{1}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t,s-1,\binom{n}{2},N}.$$

D.h. solange $N \leq (s-1)\binom{n}{2}$ gilt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß $\Gamma_{t,n,N}$ aus lauter s-isolierten Knoten besteht, positiv; bei $N > (s-1)\binom{n}{2}$ wird sie wegen des Dirichletschen Taubenschlagprinzips zu Null. Für s=1 heißt das natürlich, daß nach Ziehen der ersten Kante der Multigraph nicht mehr nur 1-isolierte Knoten enthalten kann. Bei s=2 jedoch gilt z.B. bereits

$$P(Y^*_{t,2,n,N,1}=n) = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} t^N.$$

Also erst beim Zug der $\{\binom{n}{2}+1\}$-ten Kante von $t\binom{n}{2}$ möglichen Kanten enthält $\Gamma_{t,n,N}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht mehr nur 2-isolierte Knoten, sondern mindestens zwei 2-verbundene Knoten.

Wie in Paragraph 2.3 erläutert, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen "Kante" bei einfachen Graphen und "s-gesättigte Belegung" bei Multigraphen. Während aber die Zahl N der Kanten sowohl im Modell 3 als auch in unserem Wahrscheinlichkeitsmodell vorgegeben ist, ist die Zahl der s-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ eine Zufallsvariable. Ihre Verteilung ist in Paragraph 4.2 als Korollar 4.6 angegeben. Für t=1 liefert (4.6) erwartungsgemäß

$$P(V_{1,1,n,N}=N) = 1.$$

Wir bekommen also für alle Wahlen von n und N ($0 \leq N \leq \binom{n}{2}$) eine Einpunktverteilung mit dem Träger N. (Dieses Resultat ist klar, da für t=1 die Begriffe "1-gesättigte Belegung" und "Kante" dasselbe bedeuten.) Für alle anderen Wahlen von t ist die Verteilung von $V_{t,s,n,N}$ nicht zu einer Einpunktverteilung entartet, es sei denn, daß $N \leq s-1$ oder $N \geq t\{\binom{n}{2}-1\}+s$ (bzw. $N \geq t\binom{n}{2}-1$ bei s=t) gilt. In diesen Fällen ist

$$P(V_{t,s,n,N}=0) = 1 \qquad \text{für } N \leq s-1,$$

$$P(V_{t,s,n,N}=\binom{n}{2}) = 1 \qquad \text{für } N \geq t\{\binom{n}{2}-1\}+s,$$

$$P(V_{t,t,n,t\binom{n}{2}-1}=\binom{n}{2}-1) = P(V_{t,t,n,t\binom{n}{2}}=\binom{n}{2}) = 1 \quad (s=t).$$

Die Beweise zu den Sätzen 4.12 und 4.16 zeigen die Bedeutung der s-gesättigten Belegungen für die Wahrscheinlichkeitstheorie der ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen. Mit denselben Überlegungen wie in diesen Beweisen kann man für $P_{t,n,N}(C_k^s)$ statt (4.13.1) die nachfolgende Formel herleiten.

$$(4.29) \qquad P_{t,n,N}(C_k^s) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \sum_{v=n-k-1}^{\binom{n-k}{2}} C_{n-k,v}\, \tilde{K}_{t,s,v,\binom{n}{2}-v,N}.$$

Ebenso erhält man statt der in Satz 4.15 hergeleiteten Formeln für den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der s-isolierten Knoten

$$(4.30.1) \qquad EY^*_{t,s,n,N,m} = \binom{n}{m} \sum_{v} \sum_{\mu} \frac{\binom{t\binom{n-m}{2}}{N-\mu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{m,v}\, \tilde{K}_{t,s,v,m(n-\frac{1}{2}(m+1))-v,\mu},$$

(4.30.2) $\operatorname{Var} Y^*_{t,s,n,N,m} = EY^*_{t,s,n,N,m} - (EY^*_{t,s,n,N,m})^2$

$$+ \binom{n}{m}\binom{n-m}{m} \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} \sum_{\mu} \frac{\binom{t\binom{n-2m}{2}}{N-\mu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} C_{m,\nu_1} C_{m,\nu_2} K_{t,s,\nu_1+\nu_2,M-\nu_1-\nu_2,\mu}$$

mit $\quad M := m(2n-2m-1).$

Dabei ergeben sich die Indizes wie folgt (vgl. den Beweis zu Satz 4.15).

Zu (4.30.1): ν Belegungen zwischen den m Knoten sollen s-gesättigt sein, die übrigen $\binom{m}{2}-\nu$ Belegungen nicht (sonst ist die Summation über ν nicht korrekt). Ebenso dürfen die m(n-m) Belegungen zwischen den Knoten dieser s-Komponente und den n-m anderen Knoten nicht s-gesättigt sein. Der Rest folgt wegen $m(n-m)+\binom{m}{2} = m(n-\frac{1}{2}(m+1))$.

Zu (4.30.2): Jetzt sollen $\nu_1+\nu_2$ Belegungen in den beiden s-Komponenten zusammen s-gesättigt sein, die übrigen $2\binom{m}{2}-\nu_1-\nu_2$ nicht. Ebenso dürfen die 2m(n-2m) Belegungen von den s-Komponenten zu den restlichen n-2m Knoten und die m^2 Belegungen zwischen den beiden s-Komponenten nicht s-gesättigt sein. Wegen $2m(n-2m)+2\binom{m}{2}+m^2 = m(2n-2m-1)$ folgt (4.30.2).

Man baut also den Multigraphen auf, indem man zuerst s-gesättigte Belegungen wie Kanten zwischen die Knoten eines einfachen Graphen verteilt und dann erst dieses "Gerippe" entsprechend mit den eigentlichen Kanten auffüllt.

Der enge Zusammenhang zwischen den Kanten eines einfachen Graphen und den s-gesättigten Belegungen eines Multigraphen wird weiter verdeutlicht durch die Gültigkeit solcher Formeln wie

$$E(Y^*_{t,s,n,N,1} \mid V_{t,s,n,N}=\nu) = EY^*_{1,1,n,\nu,1}$$

in diesem Wahrscheinlichkeitsmodell (siehe Anmerkung 4.8). Mit Hilfe analoger Formeln wird es oft möglich, Aussagen, deren Gültigkeit für einfache Zufallsgraphen bewiesen ist, auch auf vollständig indizierte Zufallsmultigraphen zu erweitern, wie es beim Nachweis von (4.23.4) unter Benutzung von (4.23.3) geschah.

Aus den Definitionen in Paragraph 2.2 können wir die folgenden Zusammen-

hang zwischen den Zufallsvariablen "Zahl der s-gesättigten Belegungen", "Zahl der mit x_i s-verbundenen Knoten" und "Zahl der s-isolierten Knoten" in zwei Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1} \in \Omega_{t,n,N_1}$ und $\Gamma_{t,n,N_2} \in \Omega_{t,n,N_2}$ herleiten:

(4.31.1) $EV_{t,s,n,N_1} < EV_{t,s,n,N_2} \Rightarrow EU_{t,s,n,N_1,i} < EU_{t,s,n,N_2,i}$,

(4.31.2) $EV_{t,s,n,N_1} < EV_{t,s,n,N_2} \Rightarrow EY^*_{t,s,n,N_1,1} \geq EY^*_{t,s,n,N_2,1}$.

Eine andere Möglichkeit der Erweiterung von Modell 3 auf vollständig indizierte Zufallsmultigraphen, die hier nicht besprochen wurde, bietet sich noch an: Man gibt die Zahl der s-gesättigten Belegungen des Multigraphen vor (setzt diese z.B. gleich N). Dann gelten Modell 3 und alle Sätze aus Paragraph 3.2 ohne Änderung, wenn man dort jeweils den Begriff "Kante" durch "s-gesättigte Belegung" ersetzt. In diesem neuen Modell wäre die Zahl der Kanten, die benötigt wird, um genau N s-gesättigte Belegungen in einem Zufallsmultigraphen zu erhalten, eine Zufallsvariable, deren Verteilung oder Verteilungsparameter zu berechnen blieben.

Die Formeln dieses Kapitels können zu numerischen Berechnungen verwendet werden, wie man an den Tabellen für die Erwartungswerte der Variablen $Y^*_{t,s,n,N,1}$ für verschiedene Parameter t,s,n und N am Schluß der Arbeit sieht. In den Programmen zur Berechnung dieser Tabellenwerte wurden die auftretenden Koeffizienten $K_{t,s,v,\mu}$ nach (4.1) direkt berechnet. In Formeln, in denen $L_{n,N}$ auftritt, ist jedoch die Berechnung durch die Rekursionsformeln (3.3.1) - (3.3.3) einer Berechnung nach (3.2) vorzuziehen.

5. Grenzwertsätze für Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ mit $n \to \infty$ und $N=N(n)$

In diesem Kapitel werden Ergebnisse über das asymptotische Verhalten von ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen hergeleitet. Insbesondere werden die Ergebnisse aus Erdös und Rényi (1959), die in den Sätzen 3.10 - 3.13 formuliert wurden, auf diesen Typ von Zufallsmultigraphen erweitert.

Wir betrachten also die Folge der gemäß Paragraph 2.1 definierten Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_{t,n,N}, A_{t,n,N}, P_{t,n,N})$ für $n \to \infty$ und $N=N(n)$ und gegebenes festes t, sowie die zugehörigen Folgen von Verteilungen bzw. Verteilungsparametern der auf diesen Räumen definierten Zufallsvariablen $T_{i,j,\ell}$, $U_{s,i,j}$, $U_{s,i}$ usw. (vgl. Paragraph 2.2). Die Argumente $\Gamma_{t,n,N(n)}$ der einzelnen Zufallsvariablen sind für verschiedene Wahlen von n und $N=N(n)$ verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen entnommen. Wir haben also nicht eine Folge von Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, sondern eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen, auf denen Zufallsvariablen jeweils gleicher Bedeutung definiert sind. (Diese Situation liegt z.B. auch beim Grenzwertsatz von Poisson vor.) Wir sprechen trotzdem - auch in Einklang mit der bisherigen Literatur - von der Folge der Zufallsvariablen $T_{t,n,N,i,j,\ell}$, $U_{t,s,n,N,i,j}$ usw., indem wir wieder die Parameter t,n,N(n), die die zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsräume charakterisieren, den Variablen als Indizes hinzufügen.

Anmerkung 5.1. Die Funktion bzw. Folge N(n) der Kantenzahlen in Multigraphen bezeichnen wir als Kantenfunktion. Wie in der übrigen Literatur soll auch hier vorausgesetzt sein, daß ab einem n_0 die Funktion N(n) monoton in n ist.

Die Zahl t der Schichten für jeden Zufallsmultigraphen und die Zahl s, die die Stärke des Zusammenhanges zwischen zwei Knoten angibt, sind hier fest vorgegebene Parameter.

In Übereinstimmung mit der Arbeit Erdös und Rényi (1959) für einfache Zufallsgraphen wird die Zahl N(n) der Kanten der Multigraphen einer jeden Menge $\Omega_{t,n,N(n)}$ in Abhängigkeit von der Knotenzahl n so gewählt, daß der Grenzwert der zugehörigen Folge der Erwartungswerte der

Anzahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N(n)}$ existiert und positiv ist. Dieser Grenzwert sei e^{-c} (wie in der eben genannten Arbeit von P. Erdös und A. Rényi), so daß gilt

$$(5.1) \qquad \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,s,n,N(n),1} = e^{-c} \quad (c \text{ reell}).$$

(Für t=s=1 geht (5.1) über in (3.6). Diese letzte Formel gilt, wie in Paragraph 3.2 gesagt, für Funktionen N(n), die (3.5) erfüllen.) Damit (5.1) gilt, muß N(n) für hinreichend große n monoton wachsend sein.

In Paragraph 5.1 werden wieder Hilfsmittel für die folgende Theorie angegeben. Es handelt sich hier hauptsächlich um Abschätzungen für Binomialkoeffizienten. Im folgenden Paragraphen wird der Sonderfall s=1 behandelt. In Abschnitt 5.2.1 geben wir eine Klasse von Kantenfunktionen an, für die (5.1) bei s=1 erfüllt ist. In den beiden folgenden Abschnitten werden für die Funktionen N(n) aus dieser Klasse die Grenzverteilungen der Zufallsvariablen

"Zahl der 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N(n)}$",
"Zahl der echten 1-Komponenten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$",
"Zahl der 1-Komponenten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$"

bei vorgegebenem t berechnet. Ebenso bestimmen wir den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N(n)}$ 1-zusammenhängend ist. In Abschnitt 5.2.4 zeigen wir, daß es neben den in 5.2.1 bestimmten Kantenfunktionen keine weiteren gibt, für die (5.1) bei s=1 erfüllt ist.

In Paragraph 5.3 werden die Ergebnisse aus 5.2 auf allgemeines s erweitert. In den Beweisen dieses Paragraphen benutzen wir den in Satz 4.7 angegebenen funktionalen Zusammenhang zwischen der Kantenzahl und dem Erwartungswert der Zahl der s-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen mit n Knoten, um mit der zum ersten Mal in Anmerkung 4.8 angewandten Methode die Richtigkeit der Resultate aus 5.2 auch für bel. s und entsprechend bestimmte Kantenfunktionen N(n) zu zeigen. Paragraph 5.4 enthält die Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels.

5.1. Hilfsmittel für die weitere Theorie

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigen wir für die Beweise des Paragraphen 5.3 die folgenden beiden allgemein bekannten Ungleichungen

(5.2) $P(|X-EX|\geq k) \leq \frac{\mathrm{Var}\, X}{k^2}$ (Tschebyscheff - Ungleichung),

(5.3) $Ef(X) \geq f(EX)$ für konvexe Funktionen f (Jensen - Ungleichung).

Dabei heißt eine Funktion f konvex, wenn für je drei Werte x, x_1, x_2 $(x_1<x<x_2)$ ihres Definitionsbereiches gilt

$$(f(x)-f(x_1))/(x-x_1) \leq (f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1) .$$

Die nachstehende Abschätzung für n! - die Stirling - Formel - und die folgenden Ungleichungen für Binomialkoeffizienten, die in einigen Beweisen der nächsten Abschnitte benötigt werden, sind bekannt bzw. durch einfache Rechnung verifizierbar.

(5.4) $\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\frac{1}{12n}}$ (Stirling - Formel);

(5.5.1) $\frac{(n-k)^k}{k!} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$;

(5.5.2) $\frac{k^{n-k}}{(n-k)!} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^{n-k}}{(n-k)!}$;

(5.5.3) $\frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$;

(5.6) $\binom{n-k}{2} = \binom{n}{2} - k(n-\frac{1}{2}(k+1)) \leq \binom{n}{2} - k(n-k)$.

Bekannt ist weiterhin die folgende Abschätzung für den Quotienten $\binom{a-d}{b}/\binom{a}{b}$ mit $a\in\mathbb{N}$, $b,d\in\mathbb{N}_0$ (vgl. Bollobás und Sauer (1976)).

(5.7.1) $e^{-bd/(a-d-b+1)} \leq \frac{\binom{a-d}{b}}{\binom{a}{b}} \leq e^{-bd/a}$ für $0\leq d\leq a$, $0\leq b\leq a-d$.

Für $b\geq 1$ und $0<d<a$ gilt die obige Abschätzung sogar mit "<" statt "≤". Die im nächsten Hilfssatz gegebene Formel (5.7.2) ist für $b\geq 2$ und $0<d<a$ eine echte Verschärfung von (5.7.1).

Lemma 5.1. Für $a,b,d \in \mathbb{N}$ mit $d < a$ und $b \leq a-d$ gilt die Abschätzung

$$(5.7.2) \quad \exp\left(-\frac{bd}{2(a-d)} - \frac{bd}{2(a-d-b+1)}\right) < \frac{\binom{a-d}{b}}{\binom{a}{b}} < \exp\left(-\frac{2bd}{2a-b+1}\right).$$

Beweis. Für $b=1$ sind (5.7.1) und (5.7.2) identisch. Sei jetzt $b \geq 2$. Hierfür gilt

$$(5.8) \quad \frac{\binom{a-d}{b}}{\binom{a}{b}} = \frac{a-d}{a} \cdot \frac{a-d-1}{a-1} \cdot \ldots \cdot \frac{a-d-b+1}{a-b+1} = \left(1-\frac{d}{a}\right)\left(1-\frac{d}{a-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{d}{a-b+1}\right)$$

und

$$1-\frac{d}{a-b+1} < \ldots < 1-\frac{d}{a}.$$

Durch einfache Umformungen verifiziert man die Gültigkeit von

$$\left(1-\frac{d}{a}\right)\left(1-\frac{d}{a-b+1}\right) < \left(1-\frac{d}{a-1}\right)\left(1-\frac{d}{a-b+2}\right) < \ldots < \left(1-\frac{d}{a-\frac{1}{2}(b+1)}\right)^2.$$

(Für ungerade Wahlen von b ist der letztgenannte Wert gerade das Quadrat des mittleren Faktors im Produkt (5.8).) Somit erhält man

$$\left(\left(1-\frac{d}{a}\right)\left(1-\frac{d}{a-b+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}b} < \frac{\binom{a-d}{b}}{\binom{a}{b}} < \left(1-\frac{2d}{2a-b+1}\right)^b.$$

Wegen der bekannten Abschätzung

$$(5.9) \quad e^{x/(1+x)} < 1+x < e^x \quad \text{für } x > -1, x \neq 0$$

folgt hieraus (5.7.2).⌋

Der folgende Hilfssatz liefert eine Bedingung für die Existenz des Grenzwertes von Folgen $(s_{jkn})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei j und k fest vorgegebene Parameter sein sollen. An dieser Stelle wollen wir für das folgende vereinbaren, daß der Quotient $\binom{a-d}{b}/\binom{a}{b}$ den Wert Null haben soll, wenn $a<b$ gilt.

Lemma 5.2. Seien (a_n), (b_n) und (d_n) in n monoton wachsende Folgen von natürlichen Zahlen mit

(5.10.1) $b_n^2 \cdot d_n = o(a_n^2)$

und

(5.10.2) $b_n \cdot d_n^2 = o(a_n^2)$.

Seien weiter die Folgen (f_{jkn}) und (s_{jkn}) definiert durch

(5.11) $$f_{jkn} := \binom{n-k}{j} \cdot exp\left(-\frac{b_n \cdot d_n}{a_n}\right),$$

(5.12) $$s_{jkn} := \binom{n-k}{j} \frac{\binom{a_n - d_n}{b_n}}{\binom{a_n}{b_n}}.$$

Dann gilt für feste $j,k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} f_{jkn} = s_{jk} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_{jkn} = s_{jk}.$$

Beweis. Sei n so groß, daß $a_n \geq b_n + d_n$ gilt; dann sei (g_{jkn}) definiert durch

$$g_{jkn} := \binom{n-k}{j} \cdot exp\left(-\frac{b_n \cdot d_n}{a_n - d_n - b_n + 1}\right);$$

dann gilt wegen (5.7.1) die Ungleichungskette

(5.13) $$g_{jkn} \leq s_{jkn} \leq f_{jkn}.$$

Weiter erhält man wegen (5.10.1) - (5.10.2) für feste Wahlen von j und k

$$g_{jkn}/f_{jkn} = e^{o(1)};$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (g_{jkn}/f_{jkn}) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_{jkn} = \lim_{n\to\infty} s_{jkn} = \lim_{n\to\infty} f_{jkn} = s_{jk}. \quad \square$$

Eine für die Theorie der folgenden Paragraphen wichtige Anwendung dieses Lemmas geben wir im folgenden Korollar an.

Korollar 5.3. Sei eine Folge (b_n) definiert durch

$$(5.14) \qquad b_n := [\tfrac{1}{2} n(\ell n\, n + c_n)] = [\tfrac{1}{2} n(\ell n\, n + c + o(1))] \quad (c_n \to c \text{ so, daß } b_n \geq 1).$$

Seien weiter für $n \in \mathbb{N}$, $j,k \in \mathbb{N}_0$ die Folgen (s'_{jkn}) und (s''_{jkn}) definiert durch

$$(5.15.1) \qquad s'_{jkn} := \binom{n-k}{j} \frac{\binom{t\binom{n-k-j}{2}}{b_n}}{\binom{t\binom{n-k}{2}}{b_n}}$$

und

$$(5.15.2) \qquad s''_{jkn} := \binom{n-k}{j} \frac{\binom{t\binom{n-k}{2} - tj(n-k-j)}{b_n}}{\binom{t\binom{n-k}{2}}{b_n}}.$$

Dann gilt für bel. feste j und k

$$(5.16) \qquad \lim_{n\to\infty} s'_{jkn} = \lim_{n\to\infty} s''_{jkn} = \frac{1}{j!} e^{-cj}.$$

Beweis. Für $a_n := t\binom{n-k}{2}$, $d'_n := tj(n-k-\frac{1}{2}(j+1))$, also $a_n - d'_n = t\binom{n-k-j}{2}$, $d''_n := tj(n-k-j)$ und b_n nach (5.14) sind die Voraussetzungen (5.10.1) und (5.10.2) aus Lemma 5.2 erfüllt, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s'_{jkn} = \lim_{n\to\infty} \binom{n-k}{j} \exp\left(-\frac{tj(n-k-\frac{1}{2}(j+1))\, b_n}{t\binom{n-k}{2}}\right) = \frac{1}{j!} e^{-cj},$$

$$\lim_{n\to\infty} s''_{jkn} = \lim_{n\to\infty} \binom{n-k}{j} \exp\left(-\frac{tj(n-k-j)\, b_n}{t\binom{n-k}{2}}\right) = \frac{1}{j!} e^{-cj},$$

wie man leicht unter Benutzung der Abschätzungen (5.5.1) für den Binomialkoeffizienten $\binom{n-k}{j}$ verifiziert. Dabei sind die Gauß-Klammern in (5.14) für die Durchführung des Beweises ohne Bedeutung, da eine Folge $(c_n) = (c+h_n)$ mit $h_n = o(1)$ o.B.d.A. so gewählt werden kann, daß $\frac{1}{2} n(\ell n\, n + c + h_n)$ ganzzahlig ist.]

Die Forderung, daß $b_n \geq 1$ $\forall n$ gelten soll, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da aus (5.14) ersichtlich ist, daß für jede gegen c konvergente Folge (c_n) ab einem n_0 die b_n immer positive Werte annehmen. Diese Forderung ist später, wenn (b_n) zur Kantenfunktion wird, immer erfüllt (vgl. Abschnitt 5.2.1)).

In Korollar 5.3 haben wir Aussagen über die Existenz des Grenzwertes der durch (5.15.1) und (5.15.2) definierten Folgen $(s'_{jkn})_{n\to\infty}$ bzw. $(s''_{jkn})_{n\to\infty}$ bei fest vorgegebenen ganzzahligen Parametern j und k bewiesen. Für einige Beweise der Abschnitte 5.2.2 und 5.2.3 benötigen wir die im nachstehenden Lemma angegebenen in k und n für hinreichend große n gleichmäßigen Abschätzungen.

Lemma 5.4. Seien $j,k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$; weiter seien die b_n durch die Formel (5.14) und die s''_{jkn} durch (5.15.2) definiert. Dann gelten bei festem k für bel. $\varepsilon>0$, $q\in(0,1)$ und $n \geq n_0(c,q,\varepsilon)$ *) die Abschätzungen

$$(5.17.1)\quad s''_{jkn} \leq \frac{1}{j!}\, e^{(1+\varepsilon-c)j} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq j \leq \frac{n-k}{\ell n\, n},$$

$$(5.17.2)\quad s''_{jkn} \leq q^{j} \qquad \text{für} \qquad \frac{n-k}{\ell n\, n} \leq j \leq \tfrac{1}{2}(n-k),$$

$$(5.17.3)\quad s''_{jkn} \leq q^{n-k-j} \qquad \text{für} \qquad \tfrac{1}{2}(n-k) \leq j \leq (n-k)\left(1-\frac{1}{\ell n\, n}\right),$$

$$(5.17.4)\quad s''_{jkn} \leq \frac{1}{(n-k-j)!}\, e^{(1+\varepsilon-c)(n-k-j)} \qquad \text{für} \qquad (n-k)\left(1-\frac{1}{\ell n\, n}\right) \leq j \leq n-k\,.$$

Ergänzend zu (5.17.1) gilt

$$(5.17.5)\quad s''_{jkn} \leq \frac{1}{j!}\, e^{(\varepsilon-c)j} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq j \leq m_n,$$

wenn m_n die Bedingung $m_n = o((n-k)/\ell n\, n)$ erfüllt.

Beweis. Die ersten Glieder von (s''_{jkn}), für die $t\binom{n-k}{2} \leq b_n$, also insbesondere $n \leq k$ gilt, können wir laut Vereinbarung durch Null abschätzen. Wegen $s''_{jkn} = s''_{n-k-j,k,n}$ folgt (5.17.3) aus (5.17.2) und (5.17.4) aus (5.17.1). Wir können uns somit auf den Fall $0 \leq j \leq \frac{1}{2}(n-k)$ beschränken. Hier gilt wegen der Ungleichungen (5.5.1) und (5.7.1)

$$s''_{jkn} \leq \frac{(n-k)^j}{j!}\exp\left(-\frac{tj(n-k-j)b_n}{t\binom{n-k}{2}}\right) = \frac{(n-k)^j}{j!}\exp\left(-\frac{2j(n-k-j)b_n}{(n-k)(n-k-1)}\right)$$

$$\leq \frac{(n-k)^j}{j!}\exp\left(-\frac{2j(n-k-j)b_n}{(n-k)n}\right).$$

(a) Sei $0 \leq j \leq \frac{n-k}{\ell n\, n}$. Dann gilt

$$s''_{jkn} \leq \frac{1}{j!}\exp\left(j\left(\ell n\, n - \frac{2b_n}{n} + \frac{2jb_n}{n(n-k)}\right)\right) \leq \frac{1}{j!}\exp\left(j\left(\ell n\, n - \frac{2b_n}{n} + \frac{n-k}{\ell n\, n}\,\frac{2b_n}{n(n-k)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{j!}\exp\left(j(1-c+o(1))\right) \leq \frac{1}{j!}\, e^{(1+\varepsilon-c)j},$$

wobei die letzte Abschätzung für hinreichend große n gilt. Ist zusätz-

*) Dabei hängt n_0 nicht nur von c, sondern auch von der speziellen Form der Folge (c_n) ab.

lich noch $j \leq m_n$ mit $m_n = o((n-k)/\ell n\, n)$, so folgt (5.17.5) direkt aus der vorletzten Ungleichung, wenn man j durch m_n statt durch $\frac{n-k}{\ell n\, n}$ nach oben abschätzt.

(b) Sei $\frac{n-k}{\ell n\, n} \leq j \leq \frac{1}{2}(n-k)$. In diesem Bereich gilt wegen (5.5.3)

$$s''_{jkn} \leq \left(\frac{e(n-k)}{j}\right)^j \exp\left(-\frac{2j(n-k-j)b_n}{(n-k)n}\right) \leq (e\,\ell n\, n)^j \exp\left(-\frac{jb_n}{n}\right)$$

$$= \exp\left(j\left(1 + \ell n\, \ell n\, n - \tfrac{1}{2}\ell n\, n - \frac{c}{2} - o(1)\right)\right) = \exp\left(-\tfrac{j}{2}(1+o(1))\ell n\, n\right)$$

$$\leq \exp\left(-\tfrac{j}{3}\ell n\, n\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^j \leq q^j ;$$

die letzten beiden Ungleichungen gelten, falls n hinreichend groß ist.

Mit (a) und (b) sind die Abschätzungen (5.17.1) - (5.17.5) für $n \geq n_0 = n_0(c,q,\epsilon)$ bewiesen; dabei hängt n_0 nicht von k ab. Die Abschätzungen sind also gleichmäßig in k und $n \geq n_0$. ⌋

Wegen (5.6) und der Gültigkeit von $\binom{a-d}{b} \leq \binom{a}{b}$ für bel. $a,b,d \in \mathbb{N}$ gilt für die durch (5.15.1) und (5.15.2) definierten Folgen

(5.17.6) $\quad s'_{jkn} \leq s''_{jkn}$;

d.h. die Abschätzungen (5.17.1) - (5.17.5) gelten in dieser Form auch für die Glieder der Folge (s'_{jkn}).

5.2. Theorie für den Sonderfall s=1

5.2.1. Die Kantenfunktionen $N_1(n)$

Wir hatten zu Beginn dieses Kapitels gesagt, daß wir in Folgen von Zufallsmultigraphen die Kantenzahlen als Funktion der Knotenzahlen so wählen wollen, daß für die zugehörigen Folgen der Erwartungswerte der Zahlen der s-isolierten Knoten (5.1) gilt. Für s=1 geht diese Bedingung über in

$$(5.1^*) \qquad \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N(n),1} = e^{-c} .$$

Dabei soll im folgenden jede Kantenfunktion N(n) die Nebenbedingung $1 \leq N(n) \leq t\binom{n}{2}$ $\forall n$ erfüllen. Im folgenden Hilfssatz geben wir eine Klasse von Kantenfunktionen an, für die (5.1*) gilt.

Lemma 5.5. In Folgen $(\Gamma_{t,n,N(n)})$ von Zufallsmultigraphen gilt:

$$(5.18) \qquad N(n) = [\tfrac{1}{2} n(\ell n\, n + c + o(1))]$$

$$\Rightarrow$$

$$(5.1^*) \qquad \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N(n),1} = e^{-c} .$$

Beweis. Aus Formel (4.23.1) von Satz 4.22 erhalten wir

$$EY^*_{t,1,n,N(n),1} = n \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N(n)}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N(n)}} ;$$

wenden wir jetzt Korollar 5.3 mit j=1 und k=0 an, so folgt (5.1*).]

Anmerkung 5.2. Die Folge (b_n) wird also zur Kantenfunktion N(n). Wir haben in diesem Abschnitt nur gezeigt, daß (5.18) eine hinreichende Bedingung für (5.1*) ist. In Abschnitt 5.2.4 werden wir unter anderem beweisen, daß (5.18) auch notwendig ist. In der durch (5.18) festgelegten Klasse von Kantenfunktionen N(n) gibt es solche, die völlig unabhängig vom Parameter t sind, etwa $N(n) = [\frac{1}{2} n(\ell n\, n + c)]$. In allen anderen Fällen hängt N(n) nur über eine Funktion $h(n) = o(1)$ von t ab. Im folgenden wollen wir deshalb die durch (5.18) bestimmten Funktionen mit $N_1(n)$ bezeichnen - weil s=1 gilt - oder mit $N_1(c,n)$, um die Abhängigkeit von c besonders zu betonen.

5.2.2. Die Grenzverteilung der Zufallsvariablen "Zahl der 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$" für $n \to \infty$

In Anmerkung 4.8 hatten wir gezeigt, daß der Erwartungswert der Zahl der 1-isolierten Knoten nicht kleiner ist als die Varianz dieser Anzahl (vgl. (4.23.3)). Korollar 5.3 liefert für j=2 und k=0

$$\lim_{n\to\infty} n(n-1)\, \frac{\binom{t\binom{n-2}{2}}{N_1(n)}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N_1(n)}} = e^{-2c};$$

aus (4.23.2) von Satz 4.22 folgt somit

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var} Y^*_{t,1,n,N_1(n),1} = e^{-c}.$$

D.h. für alle gemäß (5.18) erlaubten Funktionen $N_1(n)$ existiert neben dem Grenzwert der Folge der Erwartungswerte auch der Grenzwert der Folge der Varianzen der Anzahl der 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$; dieser ist positiv und gleich dem Grenzwert der Erwartungswerte. Im nächsten Satz zeigen wir, daß die Grenzverteilung dieser Anzahl für $n \to \infty$ einer Poissonverteilung mit dem Parameter e^{-c} genügt (eine nach dem bisher gesagten naheliegende Vermutung).

Satz 5.6. Für die Grenzverteilung der Folge der Zufallsvariablen "Zahl der 1-isolierten Knoten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$" gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(Y^*_{t,1,n,N_1(n),1}=k) = e^{-e^{-c}}\, \frac{e^{-ck}}{k!}; \tag{5.19}$$

die Zahl der 1-isolierten Knoten genügt also bei entsprechender Wahl der Kantenfunktion nach (5.18) in der Grenze einer $P(e^{-c})$ - Verteilung.

Beweis. Im folgenden schreiben wir abkürzend N statt $N_1(n)$. Aus Satz 4.22 übernehmen wir für die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Knoten 1-1-isoliert sind, die Formel (4.22.2) und erhalten

$$(4.22.2)\quad P(Y^*_{t,1,n,N,1}=k) = \binom{n}{k} \frac{\binom{t\binom{n-k}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{t\binom{n-k-j}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n-k}{2}}{N}}$$

$$= s'_{kOn} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j s'_{jkn}$$

(mit s'_{jkn} gemäß (5.15.1) aus Korollar 5.3). Wir definieren für gegebenes $\varepsilon>0$ und $q\in(0,1)$ die Zahlen s_j durch

$$(5.20)\qquad s_j := \frac{1}{j!} e^{(1+\varepsilon-c)j} + q^j .$$

Dann erhalten wir aus Lemma 5.4 wegen (5.17.6) und der Symmetrie der durch (5.15.2) definierten Zahlen s''_{jkn} in j bzgl. $\frac{1}{2}(n-k)$ für $n \geq n_0(c,q,\varepsilon)$

$$\sum_{j=0}^{n-k} s'_{jkn} \leq \sum_{j=0}^{n-k} s''_{jkn} \leq 2 \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n-k)} s_j .$$

Die rechts stehende Reihe konvergiert für $n\to\infty$; die Summanden s_j dieser Reihe sind für alle festen k und hinreichend große n gleichmäßige Majoranten der s''_{jkn} und s'_{jkn}. Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert somit die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j s'_{jkn}$ gleichmäßig. Demzufolge gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j s'_{jkn} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \lim_{n\to\infty} s'_{jkn} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-e^{-c})^j}{j!} = e^{-e^{-c}}$$

wegen (5.16). Mit derselben Formel erhalten wir auch

$$\lim_{n\to\infty} s'_{kOn} = \frac{1}{k!} e^{-ck} .$$

Zusammen ergeben die beiden letzten Formeln dann die Behauptung (5.19).]

Den Sonderfall, daß kein Knoten in einem ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen 1-isoliert ist, geben wir als Korollar an.

Korollar 5.7. Es gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ keine 1-isolierten Knoten enthält,

$$\lim_{n\to\infty} P(Y^*_{t,1,n,N_1(n),1}=0) = e^{-e^{-c}} .$$

5.2.3. Der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ 1-zusammenhängend ist, und die Grenzverteilung der Zahl der 1-Komponenten

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten der nicht 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen untersuchen. Eine wichtige Frage, die wir mit Hilfe der nächsten Hilfssätze beantworten, ist die folgende.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich die nicht 1-isolierten Knoten auf genau k echte 1-Komponenten verteilen, für $n \to \infty$?

Sei E_M^1 die Eigenschaft, daß die größte 1-Komponente eines Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ aus mindestens n-M Knoten besteht. Dann erhalten wir die folgende Aussage.

Lemma 5.8. Sei (M_n) eine bel. Folge mit $M_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ und $M_n = o(n)$. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß in der größten 1-Komponenten eines Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ weniger als $n-M_n$ Knoten liegen,

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N_1(n)}(\overline{E}^1_{M_n}) = 0 .$$

Beweis. (a) Abschätzung der Knotenzahl in der größten 1-Komponenten: Ein Multigraph $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ bestehe aus genau k 1-Komponenten zu je n_i Knoten $(i=1,\dots,k)$, also $n_1+\dots+n_k = n$. Für $L_n := max\{n_1,\dots,n_k\}$ gilt wegen

$$N_1(n) \leq \sum_{i=1}^{k} t\binom{n_i}{2} < \tfrac{1}{2} t \sum_{i=1}^{k} n_i L_n = \tfrac{1}{2} t\, n L_n$$

die Abschätzung

$$L_n > L_n^* := 2N_1(n)/(tn) = (\ell n n + c + o(1))/t .$$

Die größte 1-Komponente eines bel. Multigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ enthält also immer mindestens $2N_1(n)/(tn)$ Knoten.

(b) Abschätzung von $P_{t,n,N_1(n)}(\overline{E}^1_{M_n})$:
Die größte 1-Komponente eines Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ bestehe aus n-j Knoten. Wegen (a) muß dann $j < n-L_n^*$ gelten. Andererseits muß $j > M_n$ gelten, damit dieser Zufallsmultigraph die Eigenschaft $\overline{E}^1_{M_n}$ besitzt. Sei die Knotenmenge G des Multigraphen aufgeteilt in die Menge G_1 mit den Knoten $x_1,\dots,x_{n-j}$ und die Knotenmenge G_2 mit den restlichen j Knoten. Dann gibt $\binom{t\binom{n}{2}-tj(n-j)}{N_1(n)}$ die Zahl der Möglichkeiten an, die

$N_1(n)$ Elemente für die Kantenmenge so auszuwählen, daß keine Kante aus den $j(n-j)$ Belegungen stammt, die Knoten aus G_1 mit Knoten aus G_2 verbinden. Daraus folgt

$$P_{t,n,N_1(n)}(\overline{E}^1_{M_n}) \leq \sum_{M_n<j<n-L_n^*} \binom{n}{j} \frac{\binom{t\binom{n}{2}-tj(n-j)}{N_1(n)}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N_1(n)}}$$

$$= \sum_{M_n<j\leq n/2} s''_{j0n} + \sum_{L_n^*<j<n/2} s''_{j0n},$$

wobei wir wieder die abkürzende Schreibweise (5.15.2) benutzen (hier ist k=0) und die Symmetrie der s''_{j0n} in j bzgl. n/2 ausnutzen. Seien die Zahlen s_j wieder durch (5.20) definiert. Dann gilt sicher für alle hinreichend großen n ($n\geq n_0(c,q,\varepsilon)$) $s''_{j0n} \leq s_j$, und wir erhalten für solch große Werte von n

$$P_{t,n,N_1(n)}(\overline{E}^1_{M_n}) \leq \sum_{j=M_n}^{\infty} s_j + \sum_{j=L_n^*}^{\infty} s_j .$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} s_j$ und wegen $L_n^* \uparrow \infty$ und $M_n \uparrow \infty$ $(n\to\infty)$ konvergieren die beiden Restsummen auf der rechten Seite der letzten Abschätzung gegen Null für $n\to\infty$. Das ist aber die Behauptung.]

Anmerkung 5.3. Einen Beweis der Aussage dieses Lemmas, allerdings formuliert für einfache Zufallsgraphen $\Gamma_{n,N_1(n)}$, findet man in Erdös und Rényi (1959), eine Korrektur der in diesem Beweis benutzten Abschätzungen in Godehardt und Steinebach (1978) - siehe Lemma 5.4. Die Beweise zu den Lemmata 5.4 und 5.8 entsprechen bis auf Details (Formulierung für vollständig indizierte Zufallsmultigraphen und Verallgemeinerung der Ungleichungen) den Beweisen in den o.g. Arbeiten.

Nach Lemma 5.8 konvergiert also die Wahrscheinlichkeit, daß in der größten 1-Komponenten von Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ bereits bis auf eine Anzahl der Größenordnung $o(n)$ alle Knoten liegen, gegen 1. Im nächsten Hilfssatz zeigen wir, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß neben dieser größten 1-Komponenten noch eine zweite nicht entartete 1-Komponente in $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ enthalten ist, gegen Null strebt. Nach den in Paragraph 4.3 eingeführten Bezeichnungen ist $\overline{C}^1$ das Ereignis, daß ein Multigraph mindestens zwei echte 1-Komponenten enthält.

Lemma 5.9. Es gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ mehr als eine echte 1-Komponente enthalten,

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N_1(n)}(\overline{C}^1) = 0.$$

Beweis. Wir schreiben im folgenden N statt $N_1(n)$.
(a) Wählen wir $M_n = \ell n\, \ell n\, n$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} P_{t,n,N}(\overline{C}^1) &= P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap \overline{E}^1_{\ell n\, \ell n\, n}) + P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap E^1_{\ell n\, \ell n\, n}) \\ &\leq P_{t,n,N}(\overline{E}^1_{\ell n\, \ell n\, n}) + P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap E^1_{\ell n\, \ell n\, n}) . \end{aligned}$$

Wegen Lemma 5.8 genügt zum Beweis der Behauptung dieses Lemmas somit der Nachweis von

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap E^1_{\ell n\, \ell n\, n}) = 0 .$$

(b) Seien j und μ fest. Dann ist $\binom{t\binom{j}{2}}{\mu}\binom{t\binom{n-j}{2}}{N-\mu}$ die Zahl der Möglichkeiten, N Kanten so zwischen n Knoten zu ziehen, daß zwischen j bestimmten Knoten μ Kanten liegen und zwischen den n-j anderen Knoten die N-μ übrigen Kanten. Sei j die Zahl der Knoten, die nicht in der größten 1-Komponenten liegen. Somit gilt die Abschätzung

$$P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap E^1_{\ell n\, \ell n\, n}) \leq \sum_{j=2}^{\ell n\, \ell n\, n} \binom{n}{j} \sum_{\mu=1}^{\binom{j}{2}} \binom{t\binom{j}{2}}{\mu} \frac{\binom{t\binom{n-j}{2}}{N-\mu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} ;$$

denn wegen der Eigenschaft $E^1_{\ell n\, \ell n\, n}$ gilt $j \leq \ell n\, \ell n\, n$, und wegen der Eigenschaft $\overline{C}^1$ muß $j \geq 2$ und $\mu \geq 1$ gelten. Wegen der Monotonie des Binomialkoeffizienten und wegen (5.17.5) erhalten wir für $2 \leq j \leq \ell n\, \ell n\, n$ und $1 \leq \mu \leq \binom{j}{2}$, wenn n groß genug ist,

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} \frac{\binom{t\binom{n-j}{2}}{N-\mu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} &\leq \binom{n}{j} \frac{\binom{t\binom{n-j}{2}}{N-1}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} = \frac{N}{t\binom{n-j}{2}-N+1} \binom{n}{j} \frac{\binom{t\binom{n-j}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \\ &\leq \frac{(1+\varepsilon)\, \ell n\, n}{t\, n} \frac{1}{j!}\, e^{(\varepsilon - c)j} . \end{aligned}$$

Wegen der bekannten Identität $\sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} = 2^m$ erhalten wir

$$\sum_{\mu=1}^{\binom{j}{2}} \binom{t\binom{j}{2}}{\mu} \leq 2^{t\binom{j}{2}} \leq \exp\left(t\binom{\ell n\, \ell n\, n}{2}\right) \quad \text{für } j \leq \ell n\, \ell n\, n .$$

Das liefert uns zusammen mit der letzten Abschätzung

$$\begin{aligned} P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap E^1_{\ell n\, \ell n\, n}) &\leq \frac{(1+\varepsilon)\, \ell n\, n}{t\, n} \sum_{j=2}^{\ell n\, \ell n\, n} \frac{1}{j!}\, e^{(\varepsilon-c)j}\, 2^{t\binom{j}{2}} \\ &\leq \frac{(1+\varepsilon)\, \ell n\, n}{t\, n} \exp\left(e^{(\varepsilon-c)} + t\binom{\ell n\, \ell n\, n}{2}\right) \\ &= \frac{1+\varepsilon}{t} \exp\left(e^{(\varepsilon-c)}\right) \exp\left(-\ell n\, n + \ell n\, \ell n\, n + t\binom{\ell n\, \ell n\, n}{2}\right) \\ &= \text{const} \cdot o(1). \end{aligned}$$

Aus den Teilen (a) und (b) ergibt sich die Behauptung.⌋

Lemma 5.9 läßt sich wie folgt umformulieren.

Korollar 5.10. Für die Grenzverteilung der Anzahl der echten 1-Komponenten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\tilde{Z}_{t,1,n,N_1(n)} = 1) = 1; \tag{5.21}$$

d.h. die Grenzverteilung genügt einer Einpunktverteilung mit Träger 1.

Mit Hilfe von Lemma 5.9 können wir noch die beiden folgenden Aussagen beweisen.

Satz 5.11. Für die Verteilung der Zahl der 1-Komponenten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{t,1,n,N_1(n)} = k+1) = e^{-e^{-c}}\, \frac{e^{-ck}}{k!}. \tag{5.22}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} P(Z_{t,1,n,N} = k+1) &= P_{t,n,N}(C^1 \cap \{Z_1 = k+1\}) + P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap \{Z_1 = k+1\}) \\ &= P_{t,n,N}(C^1 \cap \{Y^*_{I,1} = k\}) + P_{t,n,N}(\overline{C}^1 \cap \{Z_1 = k+1\}) \end{aligned}$$

wegen Lemma 5.9.⌋

Satz 5.12. Für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ ganz 1-zusammenhängend ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N_1(n)}(C_0^1) = e^{-e^{-c}} . \tag{5.23}$$

Beweis. Aus Lemma 4.13 und der Definition des Ereignisses $\overline{C}^1$ folgt

$$0 \leq P(Y^*_{t,1,n,N_1(n),1}=0) - P_{t,n,N_1(n)}(C_0^1) \leq P_{t,n,N_1(n)}(\overline{C}^1).$$

Daraus folgt die Behauptung wegen Korollar 5.7 und Lemma 5.9.⌋

Die im Beweis zu Lemma 5.8 definierte Anzahl $L_n = L_{t,1,n,N_1(n)}$ der Knoten der größten 1-Komponenten in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ ist selbstverständlich eine Zufallsvariable. Nach Teil (a) des o.g. Beweises kann sie nur Werte zwischen $2N_1(n)/(tn)$ und n annehmen. Weiter gilt zwischen den beiden Variablen $L_{t,1,n,N_1(n)}$ und $Y^*_{t,1,n,N_1(n),1}$ wegen der eben bewiesenen Sätze der Zusammenhang

$$\lim_{n\to\infty} P((L_{t,1,n,N_1(n)}+Y^*_{t,1,n,N_1(n),1})/n=1) = 1.$$

(Das ist eine Umformulierung des Ergebnisses von Lemma 5.9.)

5.2.4. Bemerkungen zur Wahl von $N_1(n)$

Wir hatten in Lemma 5.5 aus Abschnitt 5.2.1 gezeigt, daß in Folgen von Zufallsmultigraphen, deren Kantenfunktionen die Bedingung

(5.18) $\quad N_1(n) = [\frac{1}{2} n(\ell n\, n + c + o(1))]$

erfüllen, ebenfalls gilt:

(5.1*) $\quad \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N_1(n),1} = e^{-c}$.

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß für alle anderen Wahlen der Kantenzahl als Funktion N(n) der Knotenzahl kein endlicher positiver Grenzwert der Folge der Erwartungswerte der Anzahl der 1-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N(n)}$ existiert. Außerdem beweisen wir, daß nur für Kantenfunktionen $N_1(n)$, also solche Funktionen, die (5.18) erfüllen, die Folge der Wahrscheinlichkeiten dafür, zusammenhängende Zufallsmultigraphen mit n Knoten zu erhalten, gegen einen Wert p aus dem offenen Intervall (0,1) konvergiert.

Satz 5.13. Sei (c_n) eine bel. Folge und $N(c_n)$ definiert durch

(5.24) $\quad N(c_n) := [\frac{1}{2} n(\ell n\, n + c_n)]$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) = p \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c \,.$$

Beweis. (a) "⇐":

$$c_n \to c \Rightarrow c_n = c + o(1) \Leftrightarrow N(c_n) = N_1(c,n)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \lim_{n\to\infty} P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) = e^{-e^{-c}} =: p < 1$$

wegen Satz 5.12.

(b) "⇒":

Wir führen den Beweis indirekt. Sei also (c_n) eine Folge, die nicht von der o.g. Form ist. Dann sind noch drei Fälle möglich:

$c_n \to \infty$ (wobei c_n so gewählt ist, daß $N(c_n) \leq t\binom{n}{2}$ gilt),
$c_n \to -\infty$ (wobei c_n so gewählt ist, daß $N(c_n) \geq 0$ gilt),
c_n divergiert unbestimmt (mit obigen Einschränkungen).

(b.1) $c_n \to \infty \Rightarrow \forall c'\ \exists n_0 = n_0(c'): \forall n \geq n_0: c_n > c'$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) \geq P_{t,n,N_1(c',n)}(C_0^1) \quad \forall c'\ \forall n \geq n_0$$

wegen Anmerkung 4.6. Wegen Satz 5.12 folgt daraus

$$1 \geq \liminf_{n\to\infty} P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) \geq e^{-e^{-c'}} \quad \forall c'.$$

Da c' bel. groß wählbar ist und die obige Aussage für alle c' gilt, so muß gelten

$$1 \geq \liminf_{n\to\infty} P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) \geq 1,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) = 1.$$

(b.2) $c_n \to -\infty \Rightarrow \forall c''\ \exists n_0 = n_0(c''): \forall n \geq n_0: c_n < c''$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1) = 0.$$

(b.3) Falls (c_n) unbestimmt divergiert, so konvergiert die Folge der Wahrscheinlichkeiten $P_{t,n,N(c_n)}(C_0^1)$ nicht mehr. Denn hat eine Folge (c_n) die beiden endlichen Häufungspunkte $c_1 \neq c_2$, so gibt es zwei Teilfolgen $(c_{n_{1i}})$ und $(c_{n_{2i}})$ mit $c_{n_{1i}} \to c_1$ und $c_{n_{2i}} \to c_2$, so daß wegen (a)

$$P_{t,n,N(c_{n_{1i}})}(C_0^1) \to e^{-e^{-c_1}},$$
$$P_{t,n,N(c_{n_{2i}})}(C_0^1) \to e^{-e^{-c_2}}$$

gilt. Ist dagegen $+\infty$ oder $-\infty$ ein Häufungspunkt von (c_n), so folgt die Behauptung wegen (b.1) bzw. (b.2). ⌋

Satz 5.14. Sei (c_n) eine bel. Folge und $N(c_n)$ durch (5.24) definiert. Dann gilt

$$0 < \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N(c_n),1} < \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Beweis. Die Richtung "⇐" gilt wegen Lemma 5.5. Unter Benutzung von (4.23.1) und der Abschätzungen (5.7.1) zeigt man leicht

$$c_n \to \infty \Rightarrow EY^*_{t,1,n,N(c_n),1} \to 0,$$
$$c_n \to -\infty \Rightarrow EY^*_{t,1,n,N(c_n),1} \to \infty.$$

Wie in Teil (b.3) des letzten Beweises zeigt man, daß die Folge der Erwartungswerte nicht mehr konvergiert, wenn (c_n) unbestimmt divergiert.]

Es ist von der Wahl der Kantenfunktion $N_1(n)$ - d.h. von der Wahl der Funktion $h(n) = o(1)$ in (5.18) - abhängig, wie weit die Erwartungswerte der Anzahlen der 1-isolierten Knoten für finite n von ihrem Grenzwert e^{-c} abweichen. Hinweise, wie $N_1(n)$ gewählt werden soll, damit bereits für kleine n eine brauchbare Approximation dieses Grenzwertes erzielt werden kann, liefern die Abschätzungen (5.7.1) und (5.7.2). Aus (5.7.1) erhalten wir wegen (4.23.1)

$$\exp\left(\ell n\, n - \frac{t(n-1)N_1(n)}{t\binom{n-1}{2}-N_1(n)+1}\right) \leq EY^*_{t,1,n,N_1(n),1} = n\,\frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N_1(n)}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N_1(n)}} \leq \exp\left(\ell n\, n - 2N_1(n)/n\right).$$

Setzt man den Erwartungswert gleich e^{-c}, so folgt durch Auflösen nach $N_1(n)$

$$(5.25.1)\quad \left[\tfrac{1}{2}(n-2)(\ell n\, n + c)\left(1 - \frac{(n-2)(\ell n\, n + c) - 2}{(n-2)(t(n-1) + \ell n\, n + c)}\right)\right] \leq N_1(n) \leq \left[\tfrac{1}{2}n(\ell n\, n + c)\right].$$

Aus der oberen Abschätzung in (5.7.2) ergibt sich durch analoge Rechnung als Verbesserung der rechten Seite in (5.25.1)

$$(5.25.2)\quad N_1(n) \leq \left[\tfrac{1}{2}n(\ell n\, n + c)\left(1 - \frac{n(\ell n\, n + c) - 2}{n(2t(n-1) + \ell n\, n + c)}\right)\right].$$

Diese Abschätzung zusammen mit der linken Seite von (5.25.1) legt nahe, in (5.18) eine Funktion $h(n) = o(1)$ einzusetzen, die negative Werte annimmt und die Größenordnung $(\ell n\, n)^2/n$ besitzt, damit bereits für kleine n die Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,N_1(n),1}$ eine brauchbare Approximation des Wertes e^{-c} sind. Sehr gute Ergebnisse erzielt man mit der empirisch gefundenen Kantenfunktion

$$(5.25.3)\quad N_1(n) = \left[\tfrac{1}{2}(n-1)(\ell n\, n + c)\left(1 - \frac{(n-1)(\ell n\, n + c) - 2}{(n-1)(2t(n-1) + \ell n\, n + c)}\right)\right]$$

(einer Art "Mittel" zwischen der Unterschätzung in (5.25.1) und (5.25.2)),

wie ein Vergleich der Tabellen 1.2 und 1.4 im Anschluß dieses Kapitels ergibt. (In Tabelle 1.2 sind die Werte der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_1(0,n)$ und die zugehörigen Erwartungswerte der Anzahlen der 1-isolierten Knoten aufgelistet. Dabei verstehen wir für bel. Parameter s,t und c unter der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_{t,s}(c,n)$ die Folge der Kantenzahlen N, für die die Erwartungswerte $EY^*_{t,s,n,N,1}$ dem Wert e^{-c} am nächsten kommt; d.h. die Glieder der optimalen Kantenfunktion erfüllen

$$|EY^*_{t,s,n,\tilde{N}_{t,s}(c,n),1} - e^{-c}| = \min_{\nu\in\mathbb{N}_0} |EY^*_{t,s,n,\nu,1} - e^{-c}| \quad \forall n$$

zu gegebenen festen Parametern s,t,c.)

In den Tabellen wird nur der Fall c=0 abgehandelt. Entsprechende Rechnungen für $c=-0.6931$, $c=-1.3863$, sowie $c=-2.0794$ (also $e^{-c}=2$, $e^{-c}=4$, $e^{-c}=8$) bestätigen die Güte von (5.25.3).

Die Tabellen 1.1, 1.3 und 1.5 zeigen, daß für die Kantenfunktionen

$$N_1(0,n) = [\tfrac{1}{2} n \ln n] ,$$

$$N_1(0,n) = \left[\tfrac{1}{2} n \ln n \left(1 - \frac{n \ln n - 2}{n(2t(n-1) + \ln n)}\right)\right] ,$$

$$N_1(0,n) = \left[\tfrac{1}{2}(n-2) \ln n \left(1 - \frac{(n-2)\ln n - 2}{(n-2)(t(n-1) + \ln n)}\right)\right] ,$$

also $e^{-0}=1$ als Grenzwert der o.g. Erwartungswerte, bei finiten N diese Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1}$ teilweise noch erheblich vom ihrem Grenzwert abweichen. Wegen (5.25.1) und (5.25.2) sind die durch die beiden ersten Kantenfunktionen gegebenen Kantenzahlen zu groß, d.h. die Erwartungswerte der Anzahlen der 1-isolierten Knoten nähern sich von unten dem Wert 1 an. Entsprechend unterschätzen wir mit der letzten Kantenfunktion die optimalen Kantenzahlen und erhalten als Erwartungswerte Zahlen, die größer als 1 sind.

5.3. Theorie für allgemeines s

5.3.1. Die Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$

Aus dem letzten Paragraphen wurden Fragestellungen, die die Zufallsvariablen "Zahl der 1-gesättigten Belegungen in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$" betrafen, ausgeklammert. In den Beweisen zu den Ergebnissen der Abschnitte 5.2.1 - 5.2.4 wurde auch keine Information über diese Zufallsvariable $V_{t,1,n,N_1(n)}$ benötigt. Bei allgemeinem s dagegen können wir die Kantenfunktionen N(n), für die die Folge der Erwartungswerte der Zahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N(n)}$ gegen einen positiven Wert konvergiert, nur unter Zuhilfenahme des durch die Formel (4.8.1) beschriebenen Zusammenhangs zwischen N(n) und $EV_{t,s,n,N(n)}$ und nachstehender Beziehung zwischen den Gliedern der beiden einer Folge $(\Gamma_{t,n,N(n)})$ zugeordneten Folgen $(EY^*_{t,s,n,N(n),1})$ und $(EV_{t,s,n,N(n)})$ bestimmen. Es gilt der folgende Satz.

Satz 5.15. In einer Folge $(\Gamma_{t,n,N(n)})$ von Zufallsmultigraphen gilt

$$N(n) = \left[\tfrac{1}{2} n^{2-1/s} \left(\frac{t^s}{\binom{t}{s}} (\ell n\, n + c + o(1)) \right)^{1/s} \right] \tag{5.26}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$EV_{t,s,n,N(n)} = \tfrac{1}{2} n (\ell n\, n + c + o(1)) \tag{5.27}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,s,n,N(n),1} = e^{-c}\,; \tag{5.1}$$

nur für Funktionen N(n) nach (5.26) existiert ein positiver Grenzwert der Folge $(EY^*_{t,s,n,N(n),1})$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus den beiden folgenden Hilfssätzen.

Lemma 5.16. (a) Zwischen der Kantenfunktion N(n) und dem Erwartungswert der Zahl der s-gesättigten Belegungen gilt der Zusammenhang

$$EV_{t,s,n,N(n)} = 2^{s-1} \frac{\binom{t}{s}}{t^s} \frac{N(n)^s}{n^{2s-2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{N(n)^2 + n\,N(n) + n^2}{n^2\, N(n)} \right) \right\}. \tag{5.28}$$

(b) Es gilt (5.26) $\Leftrightarrow$ (5.27).

Beweis. In den folgenden Rechnungen schreiben wir V statt $V_{t,s,n,N(n)}$ und N statt N(n). Aus Satz 4.7 erhalten wir

$$EV = \binom{n}{2} \sum_{\ell=s}^{t} \binom{t}{\ell} \frac{\binom{t\binom{n}{2}-t}{N-\ell}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} = \binom{n}{2}\binom{t}{s} \frac{\binom{t\binom{n}{2}-t}{N-s}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} \left(1+O(N/n^2)\right),$$

sofern nur $N/\left(t\binom{n}{2}\right) \to r$ erfüllt ist ($0 \leq r < 1$). Weiter gilt unter dieser Voraussetzung

$$\frac{\binom{t\binom{n}{2}-t}{N-s}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} = \frac{N \cdot \ldots \cdot (N-s+1)}{t\binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \left(t\binom{n}{2}-s+1\right)} \cdot \frac{\left(t\binom{n}{2}-t\right) \cdot \ldots \cdot \left(t\binom{n}{2}-t-N+s+1\right)}{\left(t\binom{n}{2}-s\right) \cdot \ldots \cdot \left(t\binom{n}{2}-N+1\right)}$$

$$= \left(\frac{N}{t\binom{n}{2}}\right)^s \left(1+O(N/n^2)+O(1/N)\right);$$

$$\Rightarrow \qquad EV = \frac{\binom{t}{s}}{t^s} \frac{N^s}{\left(\binom{n}{2}\right)^{s-1}} \left(1+O\left(\frac{N^2+n^2}{n^2 N}\right)\right) = 2^{s-1} \frac{\binom{t}{s}}{t^s} \frac{N^s}{n^{2s-2}} \left(1+O\left(\frac{N^2+n^2}{n^2 N}\right)+O(1/n)\right).$$

Das ist die Behauptung (5.28) für $N/\left(t\binom{n}{2}\right) \to r < 1$. Ist $r > 0$ erfüllt, so hat EV die Größenordnung n^2. Wegen (4.8.4) hat somit EV ebenfalls die Größenordnung n^2, wenn $r = 1$ gilt, d.h. auch dann gilt (5.28). (In diesem Fall muß noch die Nebenbedingung $N < t\binom{n}{2} - t + s$ erfüllt sein, damit die obige Rechnung durchführbar ist; für $N \geq t\binom{n}{2} - t + s$ gilt ohnehin $EV = \binom{n}{2}$ wegen Paragraph 4.7.) Somit ist Teil (a) bewiesen.

Die Gültigkeit von Teil (b) verifiziert man durch Einsetzen von (5.26) in (5.28) und einfache Äquivalenzumformungen.]

Lemma 5.17. Es gilt (5.27) $\Leftrightarrow$ (5.1).

Beweis. (a) Beweisidee:

Wir zeigen, daß in einer Folge $(r_{t,n,N(n)})$, für die die Glieder der zugehörigen Folge $(EV_{t,s,n,N(n)})$ durch (5.27) gegeben sind,

$$(5.29) \qquad \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,s,n,N(n),1} = \lim_{n\to\infty} EY^*_{1,1,n,[EV_{t,s,n,N(n)}],1}$$

gilt. Aus der Theorie des letzten Paragraphen wissen wir, daß dieser Grenzwert sich zu e^{-c} ergibt. $([EV_{t,s,n,N(n)}]$ übernimmt die Rolle von $N_1(n)$ in einfachen Zufallsgraphen - vgl. Anmerkung 4.8 und Paragraph 2.3, und somit ergibt sich die Behauptung wegen Lemma 5.5.) Wegen (5.28) ist es jetzt das gleiche, eine Folge von Zufallsmultigraphen durch die Angabe einer Kantenfunktion oder durch die Angabe der Erwartungswerte der Zahl der s-gesättigten Belegungen zu charakterisieren.

(b) Durchführung des Beweises:

Seien im folgenden für positive reelle v die Funktionen $g_n(v)$, $f_n(v)$ und für positive ganzzahlige v die Funktion $s_n(v)$ definiert durch

$$g_n(v) := \begin{cases} n\,exp\left(-\frac{(n-1)v}{\binom{n-1}{2}-v+1}\right) & \text{für } 0 \leq v \leq \binom{n-1}{2}, \\ 0 \quad \text{sonst;} \end{cases}$$

$$f_n(v) := n e^{-2v/n};$$

$$s_n(v) := n \frac{\binom{\binom{n-1}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}}.$$

Diese Funktionen sind alle monoton fallend in v und konvex, wie man durch einfache Rechnungen leicht nachweist. ($f_n(v)$ ist im gesamten Definitionsbereich sogar streng konvex, $g_n(v)$ und $s_n(v)$ für $0 \leq v \leq \binom{n-1}{2}$.) Weiter gilt wegen (5.7.1) die Ungleichungskette

$$g_n(v) \leq s_n(v) \leq f_n(v) \quad \text{für } v \in \mathbb{N}_0.$$

(b.1) Wir lassen bei den Zufallsvariablen wieder die Indizes fort. Nach Anmerkung 4.8 gilt

$$EY^* = EE(Y^*|V) = Es_n(V).$$

Die Jensen - Ungleichung (5.3) und die obigen Abschätzungen liefern

(5.30.1) $EY^* = Es_n(V) \geq s_n([EV+1]) \geq g_n([EV+1]) \geq g_n(EV+2)$

für bel. Folgen (EV). Also gilt

(5.30.2) $\liminf_{n\to\infty} EY^* \geq \limsup_{n\to\infty} s_n([EV+1])$.

(b.2) Andererseits erhalten wir durch Aufspaltung des Erwartungswertes EY^* in Teilsummen wegen der Monotonie von $s_n(v)$ und wegen $s_n(v) \leq f_n(v)$

$$\begin{aligned} EY^* &= Es_n(V) = \sum s_n(v)\, P(V=v) \\ &\leq s_n(0)\, P(V \leq k_n) + s_n([k_n])\, P(k_n < V \leq EV - m_n) + s_n([EV-m_n])\, P(V > EV-m_n) \\ &\leq n\, P(V \leq k_n) + f_n(k_n-1)\, P(V \leq EV-m_n) + s_n([EV-m_n]) \end{aligned}$$

(vgl. Abb. 5.1). Hieraus folgt durch Vergrößerung der rechten Seite unter Benutzung der Tschebyscheff-Ungleichung (5.2) und Korollar 4.9

$$\begin{aligned} EY^* &\leq n\, \frac{\operatorname{Var} V}{(EV-k_n)^2} + f_n(k_n-1)\, \frac{\operatorname{Var} V}{m_n^2} + s_n([EV-m_n]) \\ &\leq n\, \frac{EV}{(EV-k_n)^2} + f_n(k_n-1)\, \frac{EV}{m_n^2} + s_n([EV-m_n]). \end{aligned}$$

Für die Folgen (k_n) und (m_n) mit den Gliedern

$$k_n := \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon) n \ell n n + 1 \quad (0<\varepsilon<1), \quad m_n := n/\ell n \ell n n$$

gilt $f_n(k_n-1) = n^{\varepsilon}$ und $m_n = o(n)$, und wir erhalten aus obiger Abschätzung

$$(5.30.3) \qquad EY^* \leq \frac{n\, EV}{(EV - \frac{1}{2}(1-\varepsilon) n \ell n n - 1)^2} + \frac{(\ell n \ell n n)^2 EV}{n^{2-\varepsilon}} + s_n([EV-m_n]).$$

Für $EV = \frac{1}{2} n(\ell n n + c + o(1))$ sind die beiden ersten Summanden in (5.30.3) Nullfolgen $(n \to \infty)$. Es folgt also in diesem Fall

$$(5.30.4) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup\, EY^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf\, s_n([EV-m_n]).$$

(b.3) Wegen Korollar 5.3, Lemma 5.5 und $m_n = o(n)$ gilt dann weiter

$$\lim_{n\to\infty} s_n([EV-m_n]) = \lim_{n\to\infty} s_n([EV]) = \lim_{n\to\infty} s_n([EV+1]) = e^{-c}.$$

Das zusammen mit (5.30.2) und (5.30.4) ergibt die Behauptung (5.29).
D.h. wir haben gezeigt: (5.27) ⇒ (5.1).

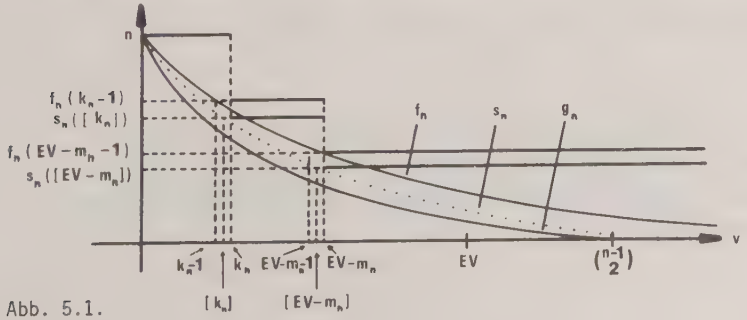


Abb. 5.1.

(b.4) Es bleibt noch zu zeigen, daß für diejenigen Folgen (EV), deren Glieder nicht der Bedingung (5.27) genügen, die Folge (EY*) nicht gegen einen positiven Grenzwert konvergiert. Der Nachweis läßt sich jetzt genauso führen wie der Beweis von Satz 5.14. Sei EV gegeben durch

$$EV = \tfrac{1}{2} n(\ell n\, n + c_n),$$

wobei c_n so gewählt ist, daß $0 \leq EV \leq \binom{n}{2}$ gilt. Wählen wir $c_n \to -\infty$, so ist $g_n(EV+2) \to \infty$, also auch $EY^* \to \infty$ wegen (5.30.1).

Wählen wir $c_n \to \infty$, so ist $f_n(EV-m_n-1) \to 0$, also auch $s_n([EV-m_n]) \to 0$. Falls $EV = o(n^{2-\varepsilon}/(\ell n\, \ell n\, n)^2)$ gilt, sind ebenfalls die beiden ersten Terme der Abschätzung (5.30.3) noch Nullfolgen. Hierfür gilt also $EY^* \to 0$. Ist EV noch stärker wachsend, so muß dann wegen (4.31.2) immer noch $EY^* \to 0$ richtig sein.

Divergiert die Folge der c_n unbestimmt, so läßt sich genauso wie in Abschnitt 5.2.4 zeigen, daß (EY*) nicht konvergiert.]

Mit den beiden Hilfssätzen 5.16 und 5.17 ist Satz 5.15 bewiesen.

Wegen $V_{t,s,n,N(n)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} U_{t,s,n,N(n),i}$ ist $EV_{t,s,n,N(n)} = \frac{1}{2} n\, EU_{t,s,n,N(n),1}$, und wir erhalten aus Lemma 5.16 das folgende Resultat.

Lemma 5.18. (a) Zwischen der Kantenfunktion N(n) und dem Erwartungswert des s-Grades eines Knotens x_i in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N(n)}$ besteht der Zusammenhang

$$(5.31) \qquad EU_{t,s,n,N(n),i} = 2^s \frac{\binom{t}{s}}{t^s} \frac{N(n)^s}{n^{2s-1}} \left\{1 + O\left(\frac{N(n)^2 + nN(n) + n^2}{n^2 N(n)}\right)\right\}.$$

(b) Genau dann, wenn für N(n) (5.26) erfüllt ist, gilt auch

$$(5.32) \qquad EU_{t,s,n,N(n),i} = \ell n\, n + c + o(1).$$

Anmerkung 5.4. Für s=1 geht (5.26) über in (5.18), und wir erhalten

$$EV_{t,1,n,N_1(n)} \sim N_1(n).$$

Für $1 < s \leq t$ wird jede durch (5.26) gegebene Kantenfunktion abhängig vom Parameter t. Im folgenden bezeichnen wir diese Funktionen mit $N_{t,s}(n)$ oder auch $N_{t,s}(c,n)$, falls die Abhängigkeit von c zusätzlich hervorgehoben werden soll.

5.3.2. Die Grenzverteilung der Zufallsvariablen "Zahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$" für $n \to \infty$

Am Beginn des Abschnittes 5.2.2 zeigten wir unter Benutzung von Korollar 5.3, daß für Funktionen $N_1(n)$ auch der Grenzwert der Folge der Varianzen der Zahl der 1-isolierten Knoten existiert und sich ebenfalls zu e^{-c} ergibt. Mit der in Anmerkung 4.8 und im Beweis zu Lemma 5.17 benutzten Idee läßt sich leicht zeigen, daß auch für allgemeines s und Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var} Y^*_{t,s,n,N_{t,s}(n),1} = e^{-c}$$

gilt. Mit $N_{t,s}(n)$ als Kantenfunktion erhält man als Grenzverteilung der Zufallsvariablen "Zahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$" wieder eine Poissonverteilung für $n \to \infty$.

Satz 5.19. Für die Grenzverteilung der Zahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(Y^*_{t,s,n,N_{t,s}(n),1}=k) = e^{-e^{-c}} \frac{e^{-ck}}{k!} ; \tag{5.33}$$

die Zahl der s-isolierten Knoten genügt also bei entsprechender Wahl der Kantenfunktion in der Grenze einer $P(e^{-c})$-Verteilung.

Beweis. Wie im Beweis des Lemmas 5.17 nutzen wir wieder die Ergebnisse des letzten Paragraphen (diesmal des Abschnittes 5.2.2) für den Fall t=1 aus, um die Behauptung des Satzes zu beweisen. Aus (4.22.1) erhalten wir

$$P(Y^*=k|V=v) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}} .$$

Somit gilt

$$P(Y^*=k) = EP(Y^*=k|V) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} E \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{V}}{\binom{\binom{n}{2}}{V}}$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \sum_{v=0}^{\binom{n}{2}} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}} P(V=v)$$

$$= \sum_{|v-EV| \leq m_n} P(V=v) \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}}$$

$$+ \sum_{|v-EV| > m_n} P(V=v) \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}} .$$

(a) Der Quotient der beiden Binomialkoeffizienten ist monoton fallend in v. Das und die Abschätzung der zweiten Doppelsumme oben durch die Tschebyscheff - Ungleichung (5.2) liefert für bel. $\mu \in \mathbb{N}$

$$P(Y^*=k) \leq \sum_{|v-EV| \leq m_n} P(V=v) \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{2\mu} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{v}}{\binom{\binom{n}{2}}{v}} + \frac{\mathrm{Var}\, V}{m_n^2}$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}\, V}{m_n^2} + \sum_{|v-EV| \leq m_n} P(V=v) \binom{n}{k} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{2\mu} \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV-m_n]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV-m_n]}}$$

$$- \sum_{|v-EV| \leq m_n} P(V=v) \binom{n}{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2\mu-1} \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV+m_n]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV+m_n]}}$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}\, V}{m_n^2} + \binom{n}{k} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{2\mu} \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV-m_n]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV-m_n]}}$$

$$- \left\{1 - \frac{\mathrm{Var}\, V}{m_n^2}\right\} \binom{n}{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2\mu-1} \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV+m_n]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV+m_n]}} .$$

Für Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$ ergibt sich nach Lemma 5.16 der Erwartungswert der Zahl der s-gesättigten Belegungen zu $EV = \frac{1}{2} n(\ell n\, n + c + o(1))$. Mit $m_n := n/\ell n\, \ell n\, n = o(n)$ gilt dann wegen (4.8.3)

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{Var}\, V/m_n^2) = \lim_{n\to\infty} (EV/m_n^2) = 0$$

(vgl. den Beweis zu Lemma 5.17). Außerdem sind [EV], $[EV-m_n]$ und $[EV+m_n]$ Funktionen, die von der Form (5.18) sind. Das liefert uns

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV]}} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{\binom{\binom{n-k}{2}}{[EV]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV]}} \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV]}}{\binom{\binom{n-k}{2}}{[EV]}}$$

$$= \frac{e^{-ck}}{k!} \cdot \frac{e^{-cj}}{j!}$$

wegen Korollar 5.3, und wir erhalten denselben Grenzwert, wenn wir [EV] durch $[EV-m_n]$ oder $[EV+m_n]$ ersetzen. Das ergibt zusammen mit der letzten Abschätzung für $P(Y^*=k)$, die für alle Wahlen von μ gilt,

$$\limsup_{n\to\infty} P(Y^*=k) \le \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{\binom{\binom{n-k-j}{2}}{[EV]}}{\binom{\binom{n}{2}}{[EV]}}$$

$$= e^{-e^{-c}} \frac{e^{-ck}}{k!}$$

wegen der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz der letzten Reihe. (Die gleichmäßige Konvergenz ergibt sich mit derselben Argumentation wie in Satz 5.6; die absolute Konvergenz, die das Umordnen von Gliedern einer unendlichen Reihe erlaubt, folgt ebenfalls aus dem Beweis dieses Satzes.)

(b) Entsprechend zeigt man

$$\liminf_{n\to\infty} P(Y^*=k) \ge e^{-e^{-c}} \frac{e^{-ck}}{k!},$$

indem man in der Formel für $P(Y^*=k)$ die Summanden mit $|v-EV|>m_n$ durch Null und die Restsumme mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung (5.2) nach unten abschätzt. Daraus folgt die Behauptung (5.33).]

Als Sonderfall erhalten wir für den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß kein Knoten in $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ s-isoliert ist, das folgende Korollar.

Korollar 5.20. Es gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ nur echte s-Komponenten und keine s-isolierten Knoten enthält

$$\lim_{n\to\infty} P(Y^*_{t,s,n,N_{t,s}(n),1}=0) = e^{-e^{-c}} .$$

5.3.3. Der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ s-zusammenhängend ist, und die Grenzverteilung der Zahl der s-Komponenten

Mit derselben Beweisidee wie zu Satz 5.19 läßt sich die Gültigkeit der beiden Hilfssätze 5.8 und 5.9 auch für allgemeines s nachweisen. Diese Ergebnisse fassen wir in dem folgenden Hilfssatz zusammen. (In Verallgemeinerung zu Abschnitt 5.2.3 sei jetzt also E_M^s die Eigenschaft, daß die größte s-Komponente eines Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ mindestens n-M Knoten enthält.)

Lemma 5.21. Sei (M_n) eine bel. Folge mit $M_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ und $M_n = o(n)$. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß in der größten s-Komponenten eines Zufallsmultigraphen weniger als $n-M_n$ Knoten liegen,

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N_{t,s}(n)}(\overline{E^s_{M_n}}) = 0;$$

weiter gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Zufallsmultigraph mehr als eine echte s-Komponente besitzt,

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N_{t,s}(n)}(\overline{C^s}) = 0.$$

Wie im Sonderfall s=1 konvergiert also auch bei bel. s die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ aus einer großen s-Komponenten und sonst nur s-isolierten Knoten bestehen, gegen 1. Und wie bei s=1 ergeben sich die folgenden Resultate jetzt direkt aus den letzten Sätzen.

Korollar 5.22. Für die Grenzverteilung der Anzahl der echten s-Komponenten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\tilde{Z}_{t,s,n,N_{t,s}(n)}=1) = 1; \tag{5.34}$$

die Grenzverteilung genügt also einer Einpunktverteilung mit Träger 1.

Satz 5.23. Für die Grenzverteilung der Zahl der s-Komponenten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{t,s,n,N_{t,s}(n)}=k+1) = e^{-e^{-c}} \frac{e^{-ck}}{k!}. \tag{5.35}$$

Satz 5.24. Für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ ganz s-zusammenhängend ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N_{t,s}(n)}(C_0^s) = e^{-e^{-c}} . \tag{5.36}$$

Anmerkung 5.5. Mit dem letzten Satz ist nur gezeigt, daß (5.26) eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß $\lim_{n\to\infty} P_{t,n,N(n)}(C_0^s) \in (0,1)$ gilt. (5.26) ist aber auch - wie (5.18) bei s=1 - notwendig hierfür. Denn wegen (5.28) gibt es eine Folge (h_n) derart, daß

$$EV_{t,s,n,N(n)} = \tfrac{1}{2} n(\ell n\, n + c_n) \Leftrightarrow N(n) = \left\lceil \tfrac{1}{2} n^{2-1/s} \left(\frac{t^s}{\binom{t}{s}} (\ell n\, n + c_n + h_n) \right)^{1/s} \right\rceil$$

gilt. Konvergiert (c_n), so ist $h_n = o(1)$, und $(c_n') := (c_n + h_n)$ konvergiert gegen denselben Grenzwert; divergiert (c_n) bestimmt oder unbestimmt, so auch (c_n'). Somit kann man unter Benutzung von Lemma 5.16 genauso wie in Abschnitt 5.2.4 beweisen, daß nur für Kantenfunktionen aus der durch (5.26) gegebenen Klasse die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß Zufallsmultigraphen s-zusammenhängend sind, gegen einen Wert aus (0,1) konvergieren (vgl. auch Teil (b.4) des Beweises zu Lemma 5.17).

5.4. Bemerkungen zu den Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$ und Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels

Wie in Anmerkung 5.4 kurz erwähnt, enthält Paragraph 5.3 die in 5.2 aufgeführten Resultate für den Fall s=1, die für sich bereits eine Erweiterung der in den Sätzen 3.10 - 3.13 formulierten Ergebnisse für einfache Zufallsgraphen von P. Erdös und A. Rényi auf vollständig indizierte Zufallsmultigraphen darstellen. (Demzufolge dienen die Sätze der Abschnitte 5.2.1 - 5.2.3 auch überwiegend zur Vorbereitung der Beweise im letzten Paragraphen.) Insbesondere gilt für diese beiden Sonderfälle

$$N_1(n) = EV_{t,1,n,N_1(n)} + o(n) \qquad (t>s=1),$$

$$N_1(n) = EV_{1,1,n,N_1(n)} \qquad (t=s=1).$$

(Die letzte Gleichheit gilt definitionsgemäß, vgl. Paragraph 4.7.)

Die Hauptergebnisse der Theorie dieses Kapitels sind in dem nachfolgend aufgeführten Satz zusammengefaßt.

Satz 5.25. Seien t,s natürliche Parameter mit $1 \leq s \leq t$; sei $(\Gamma_{t,n,N(n)})_{n\to\infty}$ eine Folge von ungerichteten, vollständig indizierten Zufallsmultigraphen mit der Kantenfunktion N(n). Dann gilt

$$N(n) = \left\lfloor \tfrac{1}{2} n^{2-1/s} \left(\frac{t^s}{\binom{t}{s}} (\ell n\, n + c + o(1)) \right)^{1/s} \right\rfloor =: N_{t,s}(n)$$

$$\Leftrightarrow \quad EV_{t,s,n,N(n)} = \tfrac{1}{2} n(\ell n\, n + c + o(1))$$

$$\Leftrightarrow \quad EU_{t,s,n,N(n),i} = \ell n\, n + c + o(1) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \lim_{n\to\infty} EY^*_{t,s,n,N(n),1} = e^{-c} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(Y^*_{t,s,n,N(n),1}=k) = \lim_{n\to\infty} P(Z_{t,s,n,N(n)}=k+1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (\text{mit } \lambda = e^{-c})$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_{t,n,N(n)}(C_0^s) = e^{-\lambda} \in (0,1) \qquad (\text{mit } \lambda = e^{-c})$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(\tilde{Z}_{t,s,n,N(n)}=1) = 1.$$

(Die letzte Implikation gilt jedoch auch für Kantenfunktionen N(n), in denen die Terme $c+o(1)$ durch Glieder einer Folge ersetzt werden, die gegen ∞ divergiert.)

Erwartungswert und Varianz der Grenzverteilung der Zahl der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ ergeben sich aus diesem Satz zu e^{-c}; ebenso ist auch der Grenzwert der Folge der Erwartungswerte und Varianzen e^{-c}. Grenzübergang und Berechnung dieser Verteilungsparameter sind also vertauschbar.

Im Beweis zu Lemma 5.17 haben wir die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,s,n,N(n),1} = \lim_{n\to\infty} EY^*_{1,1,n,[EV_{t,s,n,N(n)}],1} = e^{-c}$$

für Folgen (EV) mit $EV = \frac{1}{2}n(\ell n\, n+c+o(1))$ (also $N(n) = N_{t,s}(n)$ wegen Lemma 5.16) gezeigt. Mit derselben Beweisführung kann man die folgende allgemeinere Formel

$$EY^*_{t,s,n,N(n),1} \sim EY^*_{1,1,n,[EV_{t,s,n,N(n)}],1}$$

für solche Folgen (EV) (bzw. entsprechend gewählte Kantenfunktionen N(n)) beweisen, für die die beiden Bedingungen $n = o(EV_{t,s,n,N(n)})$ sowie $EV_{t,s,n,N(n)} = o(n^{2-\varepsilon})$ erfüllt sind.
Mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung (5.2) und Formel (4.8.3) läßt sich leicht zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} P(|V_{t,s,n,N_{t,s}(n)} - EV_{t,s,n,N_{t,s}(n)}| > \sqrt{n}\,\ell n\, n) = 0$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable "Zahl der s-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$" Werte in einem Bereich der Breite $\sqrt{n}\,\ell n\, n = o(n)$ um ihren Erwartungswert annimmt, strebt also gegen 1.

Für die Größenordnung der Erwartungswerte der Anzahlen der (s+1)-gesättigten Belegungen, (s+2)-gesättigten Belegungen, ..., in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ mit einer Kantenfunktion $N_{t,s}(n)$ gilt

$$EV_{t,s+1,n,N_{t,s}(n)} = O(n^{1-1/s}(\ell n\, n)^{1+1/s}) \quad \text{für } s+1 \leq t,$$

$$EV_{t,s+2,n,N_{t,s}(n)} = O(n^{1-2/s}(\ell n\, n)^{1+2/s}) \quad \text{für } s+2 \leq t$$

usw., wie man leicht aus (5.28) ausrechnen kann. Für das Verhältnis von (s+k+1)-gesättigten Belegungen zu (s+k)-gesättigten Belegungen folgt

dann entsprechend

$$(5.37)\qquad \frac{EV_{t,s+k+1,n,N_{t,s}(n)}}{EV_{t,s+k,n,N_{t,s}(n)}} = O\left(\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)^{1/s}\right) \quad \text{für } k=0,1,\ldots,t-s-1.$$

Setzt man noch für s=0 und alle möglichen Parameter t, n und N

$$EV_{t,0,n,N} := \binom{n}{2},$$

so gilt (5.37) auch für k=-s,-s+1,...,-1. Diese Formel gibt also für bel. s^* ($0 \leq s^* \leq t-1$) das Verhältnis von (s^*+1)- gesättigten Belegungen zu s^*-gesättigten Belegungen in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ an.

Für t>s=1 erhält man aus den obigen Formeln

$$EV_{t,2,n,N_1(n)} = O((\ell n\, n)^2),$$
$$EV_{t,3,n,N_1(n)} = O((\ell n\, n)^3/n)$$

usw. Der Anteil der Erwartungswerte der Anzahlen der mehr als 1-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_1(n)}$ ist also verschwindend gering (auch geringer als der Anteil der Erwartungswerte der Anzahlen der mehr als s-gesättigten Belegungen in einem Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N_{t,s}(n)}$ für 1<s<t). Diese Tatsache erklärt, warum dieselben Eigenschaften für Zufallsgraphen, die in den Sätzen 3.10 - 3.13 formuliert wurden, sich bei s=1 unmittelbar für dieselbe Klasse der Kantenfunktionen $N_1(n)$ auch auf Zufallsmultigraphen übertragen lassen.

Betrachten wir jetzt den Faktor $\frac{1}{2}(t^s/\binom{t}{s})^{1/s}$ in der Formel (5.26) für die Kantenfunktionen $N_{t,s}(n)$. Dieser Faktor ergibt sich bei s=1 für alle t zu $\frac{1}{2}$ (vgl. (5.18)), und weiter gilt hierfür bei bel. s

$$(5.38)\qquad \tfrac{1}{2}(t^s/\tbinom{t}{s})^{1/s} \begin{cases} = \frac{1}{2}s & (t=s), \\ \to \frac{1}{2}\sqrt[s]{s!} & (t\to\infty,\ s \text{ fest}). \end{cases}$$

Es gilt außerdem

$$t_1^s/\binom{t_1}{s} > t_2^s/\binom{t_2}{s} \qquad \text{für } s>1 \text{ und } t_1<t_2.$$

Für den Quotienten $N_{t_1,s}(n)/N_{t_2,s}(n)$ zweier Kantenfunktionen in Folgen $(\Gamma_{t_1,n,N_{t_1,s}(n)})$ und $(\Gamma_{t_2,n,N_{t_2,s}(n)})$ von Zufallsmultigraphen ergibt sich also 1 als Grenzwert bei s=1; in allen anderen Fällen gilt

$$(5.39)\qquad \lim_{n\to\infty} (N_{t_1,s}(n)/N_{t_2,s}(n)) = \frac{t_1}{t_2}\cdot\left[\frac{\binom{t_2}{s}}{\binom{t_1}{s}}\right]^{1/s} > 1 \quad (1<s\leq t_1<t_2).$$

u.n. in der zweiten Folge von Zufallsmultigraphen mit mehr "Schichten" werden prozentual weniger Kanten benötigt, um in der Grenze denselben Erwartungswert der Zahl der s-isolierten Knoten wie bei der ersten Folge zu erhalten. Dieser Sachverhalt wird durch Tabelle 2.2 bestätigt. Für eine Folge $(\Gamma_{t_2,n,N_{t_1,s}(n)})$ von Zufallsmultigraphen mit t_2 Schichten und $N_{t_1,s}(n)$ Kanten ist sogar

$$\lim_{n\to\infty} EY^*_{t_2,s,n,N_{t_1,s}(n),1} = 0 \quad (s>1)$$

nach den Sätzen des Abschnittes 5.3.1. Eine Interpretation dieser überraschenden Resultate kann hier nicht gegeben werden.

Die Stirling-Formel (5.4) liefert für (5.38)

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[s]{s!} \sim \sqrt[2s]{2\pi s}\,\frac{s}{2e} \sim \frac{s}{2e} < \frac{s}{2}.$$

Bezeichnen wir mit $N_{\infty,s}(n)$ die Kantenfunktion, die wir bei festem s durch den Grenzübergang $t\to\infty$ erhalten, so gilt also wegen (5.39)

$$(5.40)\qquad \lim_{s\to\infty}\lim_{n\to\infty} (N_{s,s}(n)/N_{\infty,s}(n)) = \lim_{s\to\infty}\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} (N_{s,s}(n)/N_{t,s}(n)) = e.$$

Die Tabellen auf den folgenden Seiten zeigen am Beispiel c=0, daß je nach Wahl einer Funktion $h(n)=o(1)$ in (5.26) die Approximation des Grenzwertes e^{-c} der Folge $(EY^*_{t,s,n,N(n),1})$ ziemlich schlecht sein kann. Mit Hilfe von (5.25.2) können wir jedoch z.B. für s=t eine Funktion h(n) angeben, die eine brauchbare Näherung an den o.g. Grenzwert bereits für kleine n liefert. Setzen wir nämlich wegen der Analogie zwischen s-gesättigten Belegungen in Multigraphen und Kanten in einfachen Graphen in (5.28) für $EV_{t,t,n,N_{t,t}(n)}$ die in (5.25.2) angegebene obere Funktion ein und setzen die Funktion $g(n)=\mathcal{O}(\{(N(n)^2+n\,N(n)+n^2)/(n^2\,N(n))\})$ in (5.28) zu Null, so erhalten wir die Kantenfunktion

$$(5.41.1)\qquad N_{t,t}(n) = \left[\tfrac{1}{2}tn(n-1)^{1-1/t}\left\{(\ell n\, n+c)\left\{1-\frac{n(\ell n\, n+c)-2}{n(2(n-1)+\ell n\, n+c)}\right\}\right\}^{1/t}\right].$$

Tabelle 5.3 zeigt zum Vergleich, daß durch diese Funktion schon für kleine Kantenzahlen n eine verhältnismäßig gute Approximation des

Wertes $e^{-0} = 1$ erreicht wird. Für $t>1$ ist die durch (5.41.1) gegebene Funktion besser als die Kantenfunktion

$$(5.41.2)\quad N_{t,t}(n) = \left[\tfrac{1}{2}\, t(n-1)n^{1-1/t}\left((\ell n\, n + c)\left(1 - \frac{(n-1)(\ell n\, n + c) - 2}{(n-1)(2(n-1) + \ell n\, n + c)}\right)\right)^{1/t}\right],$$

die man analog wie eben durch Einsetzen von (5.25.3) in (5.28) erhält. (Durch (5.41.2) werden für $t>1$ die Glieder der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_{t,t}(0,n)$ unterschätzt, vgl. die Tabellen 5.2 und 5.4.) Da auch für andere c die durch (5.41.1) gegebene Kantenfunktion relativ wenig von den Werten der optimalen Kantenfunktion abweicht, wurde auf eine weitere Verbesserung, etwa durch Einsetzen von (5.25.3) in (5.28) und geeignete Wahl einer Funktion $g(n) = O\left(\left(N(n)^2 + n\,N(n) + n^2\right)/\left(n^2\, N(n)\right)\right)$, wie sie der Beweis zu Lemma 5.16 nahelegt, verzichtet.

Das letzte Resultat in Satz 5.25, daß die beiden Wahrscheinlichkeiten $P_{t,n,N_{t,s}(n)}(C_0^s)$ und $P(Y^*_{t,s,n,N_{t,s}(n),1}=0)$ gegen denselben Wert konvergieren, d.h. daß für hinreichend große n ein Zufallsmultigraph, der keine s-isolierten Knoten enthält, bereits ganz s-zusammenhängend ist und nicht aus mehreren echten s-Komponenten besteht (eine Folge von Lemma 5.21 bzw. 5.9), entspricht genau dem, welches P. Erdös und A. Rényi 1959 in ihrer Arbeit über einfache Zufallsgraphen bewiesen, ohne daß sie, wie sie hervorhoben, eine einleuchtende Erklärung dafür geben konnten. Man benötigt nämlich in einem einfachen Graphen mit n Knoten immerhin $\binom{n-1}{2}+1$ Kanten, damit er mit Sicherheit ganz zusammenhängend ist; es genügen jedoch schon $\frac{1}{2}\, n(\ell n\, n + c_n)$ Kanten ($c_n \to c$, c reell), damit in einer Folge von Zufallsgraphen die Wahrscheinlichkeiten für das entsprechende Ereignis C_0^1 bereits gegen 1 streben (vgl. Abschnitt 5.2.4).

Der Aufbau der Beweise des letzten Paragraphen zeigt, daß die Entsprechung von Kanten in einfachen Graphen und s-gesättigten Belegungen in vollständig indizierten Multigraphen die entscheidende Voraussetzung für die Erweiterung der Ergebnisse der Sätze 3.10 - 3.13 bzw. des Paragraphen 5.2 auf bel. s darstellt. In den beiden Arbeiten Erdös und Rényi (1960) beschreiben die Autoren die Entwicklung von Zufallsgraphen mit Hilfe verschiedener Kantenfunktionen N(n). Die Darstellung der Theorie in diesen beiden Arbeiten legt die Vermutung nahe, daß ihre Resultate sich ebenfalls entsprechend auf Zufallsmultigraphen, so wie sie in dieser Arbeit definiert wurden, erweitern lassen.

Tabellen

In den nachstehenden Tabellen für die Erwartungswerte der Anzahlen der s-isolierten Knoten in Zufallsmultigraphen $\Gamma_{t,n,N(n)}$ zu bestimmten Kantenfunktionen N(n) werden einige numerische Ergebnisse zur Illustration der Theorie der beiden vorangegangenen Kapitel gegeben (vgl. die Abschnitte 4.4.2, 5.2.1, 5.2.4 und 5.3.1, sowie die Paragraphen 4.5, 4.6 und 5.4). Um Vergleiche zwischen den einzelnen Tabellen zu ermöglichen, wurden für alle Tabellen Kantenfunktionen $N_{t,s}(0,n)$ gewählt (c=0), so daß für die Folge der Erwartungswerte der Anzahlen der s-isolierten Knoten

$$\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,s,n,N_{t,s}(0,n),1} = e^{-0} = 1$$

gilt. Dabei wurden die o.g. Erwartungswerte zu gegebenen Parametern t,s,n und $N = N_{t,s}(0,n)$, wie in Korollar 4.17 angegeben, gemäß

$$(4.17.1)\quad EY^*_{t,s,n,N,1} = n \sum_{\nu=0}^{(s-1)(n-1)} \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} K_{t.s-1,n-1,\nu}$$

berechnet (mit den Koeffizienten $K_{t,s-1,n-1,\nu}$ nach Lemma 4.1). Für s=1 ergeben sich die in Satz 4.22 bzw. Korollar 4.23 aufgeführten Vereinfachungen

$$(4.23.1)\quad EY^*_{t,1,n,N,1} = n \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}},$$

$$(4.24.1)\quad EY^*_{t,2,n,N,1} = n \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{\binom{t\binom{n-1}{2}}{N-\nu}}{\binom{t\binom{n}{2}}{N}} t^\nu .$$

Die Tabellen 1.1 - 1.5 behandeln den Fall s=1. In Tabelle 1.1 sind die Werte der Kantenfunktion

(T.1) $\quad N_1(0,n) = [\frac{1}{2} n \ell n n]$

(vgl. (5.18)) und die zugehörigen Werte von $EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1}$ für t = 1, 2,3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200 vertafelt. Die Tabellen 1.2 - 1.5 entsprechen der ersten Tabelle, nur daß für diese die Kantenfunktionen

(T.2) $\quad \tilde{N}_1(0,n)$ (die optimale Kantenfunktion),

(T.3) $\quad N_1(0,n) = \left[\frac{1}{2} n \ell n n \left(1 - \frac{n \ell n n - 2}{n(2t(n-1) + \ell n n)}\right)\right]$,

(T.4) $\quad N_1(0,n) = \left[\frac{1}{2} (n-1) \ell n n \left(1 - \frac{(n-1)\ell n n - 2}{(n-1)(2t(n-1) + \ell n n)}\right)\right]$,

(T.5) $\quad N_1(0,n) = \left[\frac{1}{2} (n-2) \ell n n \left(1 - \frac{(n-2)\ell n n - 2}{(n-2)(t(n-1) + \ell n n)}\right)\right]$

gewählt wurden (vgl. (5.25.1) - (5.25.3) in Abschnitt 5.2.4).

Die Tabellen 2.1 bzw. 3.1 enthalten Werte der Kantenfunktion

(T.1*) $\quad N_{t,s}(0,n) = \left[\frac{1}{2} n^{2-1/s} \left(\frac{t^s}{\binom{t}{s}} \ell n n\right)^{1/s}\right]$

(der Verallgemeinerung von (T.1), vgl. (5.26)) und die zugehörigen Erwartungswerte für s=2 und t = 2,3,5,10,20,100 bzw. s=3 und t = 3,5,10,20, 100, jeweils für die Kantenzahlen n = 10(10)100(20)200. Für die Parameter s=5, t = 5,10,20,100 und n = 10(10)80 sind die entsprechenden Werte in Tabelle 4.1 aufgeführt. In Tabelle 5.1 sind die Zahlen für s=t=1, s=t=2, s=t=3 und s=t=5 nochmals zusammengestellt. Zusätzlich ist noch der Erwartungswert für $N_{10,10}(0,10)$ angegeben.

Die Werte der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_{t,2}(0,n)$ und die zugehörigen Erwartungswerte $EY^*_{t,2,n,\tilde{N}_{t,2}(0,n),1}$ sind in Tabelle 2.2 vertafelt (für dieselben Parameter t und n wie in Tabelle 2.1).

Entsprechend der Tabelle 5.1 sind die drei letzten Tabellen aufgebaut, Tabelle 5.2 für die optimale Kantenfunktion

(T.2*) $\quad \tilde{N}_{t,t}(0,n)$

(ohne s=t=5 und s=t=10), die Tabellen 5.3 und 5.4 für die sich mit Hilfe von (T.3) und (T.4) ergebenden Kantenfunktionen

$$(T.3^*) \qquad N_{t,t}(0,n) = \left\lceil \tfrac{1}{2} tn(n-1)^{1-1/t} \left(\ell n\, n \left(1 - \frac{n\, \ell n\, n - 2}{n(2(n-1) + \ell n\, n)} \right) \right)^{1/t} \right\rceil ,$$

$$(T.4^*) \qquad N_{t,t}(0,n) = \left\lceil \tfrac{1}{2} t(n-1)n^{1-1/t} \left(\ell n\, n \left(1 - \frac{(n-1)\ell n\, n - 2}{(n-1)(2(n-1) + \ell n\, n)} \right) \right)^{1/t} \right\rceil$$

(vgl. (5.41.1) und (5.41.2) aus Paragraph 5.4).

Man sieht, daß für s=1 und die durch (T.4) gegebene Kantenfunktion $N_1(0,n)$ bzw. für s=t und $N_{t,t}(0,n)$ nach (T.3*) bereits bei kleinen Knotenzahlen n eine brauchbare Annäherung der Erwartungswerte der Anzahlen der 1- bzw. t-isolierten Knoten an den Wert 1 erfolgt (d.h. daß die so berechneten Kantenzahlen sich nur geringfügig von den Werten der optimalen Kantenfunktion der Tabellen 1.2 und 5.2 unterscheiden).

Ein Vergleich der Tabellen 1.1, 2.1, 3.1, 4.1 und 5.1 zeigt, daß die durch (T.1) und (T.1*) gegebenen Kantenfunktionen zuviele Kanten liefern: Die Folgen der Erwartungswerte nähern sich in diesen Fällen von unten ihrem Grenzwert an. Für 1<s<t jedoch übersteigen die Glieder dieser Folgen den Grenzwert, um sich ihm von oben zu nähern. In diesen Fällen sind die so berechneten Kantenzahlen zu gering. Zu einer brauchbaren Approximation des Grenzwertes der Erwartungswerte der Anzahlen der s-isolierten Knoten auch bei kleiner Knotenzahl n muß also in (5.26) eine Funktion $h(n) = o(1)$ bestimmt werden, die positive Werte annimmt.

Eine Erklärung dieses Sachverhaltes läßt sich wohl darin suchen, daß bei 1<s<t neben Belegungen, denen genau je s Kanten zur Bildung eines ungerichteten, vollständig indizierten Multigraphen entnommen wurden, sowohl solche existieren, aus denen mindestens eine Kante und höchstens s-1 Kanten gezogen wurden (nicht möglich bei s=1), als auch solche, aus denen mehr als s Kanten stammen (unmöglich bei s=t). In diesen Fällen werden also möglicherweise zuviele Kanten "verschwendet".

n	t = 1		t = 2		t = 3	
10	11	0.5919	11	0.7264	11	0.7709
20	29	0.7221	29	0.8310	29	0.8678
30	51	0.7080	51	0.7973	51	0.8277
40	73	0.7827	73	0.8632	73	0.8905
50	97	0.8064	97	0.8789	97	0.9035
60	122	0.8249	122	0.8911	122	0.9136
70	148	0.8354	148	0.8965	148	0.9172
80	175	0.8378	175	0.8945	175	0.9137
90	202	0.8530	202	0.9064	202	0.9245
100	230	0.8577	230	0.9079	230	0.9249
120	287	0.8726	287	0.9180	287	0.9334
140	345	0.8931	345	0.9350	345	0.9492
160	406	0.8910	406	0.9295	406	0.9424
180	467	0.9027	467	0.9387	467	0.9508
200	529	0.9135	529	0.9474	529	0.9588

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	11	0.8063	11	0.8327	11	0.8459	11	0.8564
20	29	0.8974	29	0.9197	29	0.9309	29	0.9398
30	51	0.8521	51	0.8706	51	0.8799	51	0.8873
40	73	0.9126	73	0.9293	73	0.9376	73	0.9443
50	97	0.9234	97	0.9384	97	0.9459	97	0.9519
60	122	0.9318	122	0.9454	122	0.9523	122	0.9579
70	148	0.9339	148	0.9465	148	0.9529	148	0.9579
80	175	0.9292	175	0.9408	175	0.9467	175	0.9514
90	202	0.9390	202	0.9500	202	0.9555	202	0.9600
100	230	0.9387	230	0.9490	230	0.9598	230	0.9583
120	287	0.9458	287	0.9551	287	0.9578	287	0.9635
140	345	0.9606	345	0.9691	345	0.9734	345	0.9769
160	406	0.9529	406	0.9608	406	0.9647	406	0.9673
180	467	0.9606	467	0.9680	467	0.9717	467	0.9745
200	529	0.9680	529	0.9749	529	0.9784	529	0.9811

Tabelle 1.1. Der Fall s=1:
Werte der Kantenfunktion
$N_1(0,n) = [\frac{1}{2} n \ell n n]$ (vgl. (T.1))
und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1}$ nach (4.23.1)
für t = 1,2,3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200.
Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1} = 1$.

n	t = 1		t = 2		t = 3	
10	9	1.0624	10	0.9373	10	0.9833
20	26	1.0473	27	1.0440	28	0.9698
30	47	0.9673	48	0.9933	48	1.0265
40	69	0.9813	70	1.0144	71	0.9900
50	92	1.0064	94	0.9984	95	0.9826
60	117	0.9895	119	0.9901	119	1.0139
70	142	1.0053	144	1.0104	145	1.0023
80	168	1.0106	171	0.9926	172	0.9872
90	195	1.0066	198	0.9939	199	0.9901
100	223	0.9947	225	1.0068	226	1.0041
120	279	1.0038	282	1.0002	283	0.9992
140	337	1.0063	340	1.0061	341	1.0061
160	397	1.0015	400	1.0035	401	1.0043
180	458	1.0012	461	1.0047	463	0.9947
200	520	1.0024	524	0.9969	525	0.9985

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	10	1.0197	10	1.0468	10	1.0603	10	1.0711
20	28	1.0005	28	1.0236	28	1.0351	28	1.0444
30	49	0.9815	49	1.0011	49	1.0109	49	1.0188
40	71	1.0132	72	0.9786	72	0.9872	72	0.9941
50	95	1.0032	95	1.0188	96	0.9854	96	0.9916
60	120	0.9981	120	1.0123	121	0.9853	121	0.9909
70	146	0.9904	146	1.0034	146	1.0099	147	0.9861
80	172	1.0033	173	0.9900	173	0.9960	173	1.0009
90	199	1.0052	200	0.9939	200	0.9996	200	1.0042
100	227	0.9979	227	1.0086	228	0.9936	228	0.9979
120	284	0.9951	284	1.0047	285	0.9927	285	0.9965
140	342	1.0032	343	0.9975	343	1.0019	343	1.0054
160	402	1.0024	403	0.9978	403	1.0019	403	1.0059
180	464	0.9935	464	1.0011	464	1.0048	465	0.9967
200	526	0.9978	526	1.0048	527	0.9983	527	1.0014

Tabelle 1.2. Der Fall s=1:
Werte der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_1(0,n)$, für die die Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,\tilde{N}_1(0,n),1}$ alle dem Wert 1 am nächsten kommen (vgl. Abschnitt 5.2.4), und die zugehörigen Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,\tilde{N}_1(0,n),1}$ nach (4.23.1) für t = 1,2,3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200.

n	t = 1		t = 2		t = 3	
10	10	0.7968	10	0.9373	11	0.7709
20	27	0.9259	28	0.9316	29	0.8678
30	48	0.8950	49	0.9232	50	0.8893
40	70	0.9275	72	0.9109	72	0.9390
50	94	0.9212	95	0.9569	96	0.9422
60	118	0.9542	120	0.9560	121	0.9459
70	144	0.9452	146	0.9517	147	0.9447
80	170	0.9579	172	0.9671	173	0.9620
90	197	0.9602	199	0.9713	200	0.9677
100	225	0.9535	227	0.9660	228	0.9637
120	281	0.9692	284	0.9665	285	0.9658
140	339	0.9768	342	0.9770	343	0.9772
160	399	0.9758	402	0.9782	403	0.9791
180	460	0.9784	464	0.9711	465	0.9725
200	522	0.9819	526	0.9768	527	0.9784

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	11	0.8063	11	0.8327	11	0.8495	11	0.8564
20	29	0.8974	29	0.9197	29	0.9309	29	0.9398
30	50	0.9146	50	0.9336	50	0.9431	50	0.9508
40	73	0.9126	73	0.9293	73	0.9376	73	0.9443
50	97	0.9234	97	0.9384	97	0.9459	97	0.9519
60	121	0.9644	122	0.9454	122	0.9523	122	0.9579
70	147	0.9617	148	0.9465	148	0.9529	148	0.9579
80	174	0.9532	174	0.9651	175	0.9467	175	0.9514
90	201	0.9606	201	0.9717	202	0.9555	202	0.9600
100	229	0.9580	229	0.9685	229	0.9737	230	0.9583
120	286	0.9619	286	0.9714	286	0.9761	287	0.9635
140	344	0.9746	345	0.9691	345	0.9734	345	0.9769
160	404	0.9773	405	0.9730	405	0.9770	405	0.9797
180	466	0.9714	466	0.9788	467	0.9717	467	0.9745
200	528	0.9778	529	0.9749	529	0.9784	529	0.9811

Tabelle 1.3. Der Fall s=1:

Werte der Kantenfunktion

$$N_1(0,n) = \left[\frac{1}{2} n \ln n \left(1 - \frac{n \ln n - 2}{n(2t(n-1) + \ln n)}\right)\right] \quad \text{(vgl. (T.3))}$$

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1}$ nach (4.23.1)

für t = 1,2,3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1} = 1.$

n	t = 1		t = 2		t = 3	
10	9	1.0624	9	1.2051	9	1.2514
20	26	1.0473	27	1.0440	27	1.0836
30	46	1.0452	47	1.0686	48	1.0265
40	68	1.0382	70	1.0144	70	1.0438
50	92	1.0064	93	1.0417	94	1.0246
60	116	1.0261	118	1.0255	119	1.0139
70	142	1.0053	144	1.0104	145	1.0023
80	168	1.0106	170	1.0188	171	1.0130
90	195	1.0066	197	1.0171	198	1.0130
100	222	1.0160	225	1.0068	226	1.0041
120	279	1.0038	282	1.0002	282	1.0164
140	337	1.0063	340	1.0061	341	1.0061
160	397	1.0015	400	1.0035	401	1.0043
180	458	1.0012	461	1.0047	462	1.0060
200	520	1.0024	523	1.0071	524	1.0087

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	10	1.0197	10	1.0468	10	1.0603	10	1.0711
20	28	1.0005	28	1.0236	28	1.0351	28	1.0444
30	48	1.0533	49	1.0011	49	1.0109	49	1.0188
40	71	1.0132	71	1.0306	71	1.0394	71	1.0464
50	95	1.0032	95	1.0188	95	1.0267	95	1.0330
60	119	1.0330	120	1.0123	120	1.0194	120	1.0251
70	145	1.0199	146	1.0034	146	1.0099	146	1.0151
80	172	1.0033	172	1.0155	172	1.0216	173	1.0009
90	199	1.0052	199	1.0166	199	1.0224	200	1.0042
100	226	1.0184	227	1.0086	227	1.0140	227	1.0182
120	283	1.0121	284	1.0047	284	1.0095	284	1.0134
140	342	1.0032	342	1.0120	343	1.0019	343	1.0054
160	402	1.0024	402	1.0105	403	1.0019	403	1.0059
180	463	1.0048	464	1.0011	464	1.0048	464	1.0074
200	525	1.0079	526	1.0048	526	1.0084	527	1.0014

Tabelle 1.4. Der Fall s=1:

Werte der Kantenfunktion

$$N_1(0,n) = \left\lfloor \tfrac{1}{2}(n-1)\,\ell n\, n \left[1 - \frac{(n-1)\ell n\, n - 2}{(n-1)(2t(n-1) + \ell n\, n)}\right]\right\rfloor \quad \text{(vgl. (T.4))}$$

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1}$ nach (4.23.1) für t = 1,2,3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1} = 1$.

n	t = 1		t = 2		t = 3	
10	7	1.8395	8	1.5441	8	1.5893
20	23	1.5081	25	1.3097	25	1.3518
30	42	1.4220	45	1.2365	45	1.2725
40	64	1.2995	66	1.2573	67	1.2232
50	87	1.2546	90	1.1832	91	1.1618
60	111	1.2300	114	1.1799	116	1.1250
70	136	1.2092	140	1.1386	141	1.1282
80	161	1.2185	166	1.1306	167	1.1230
90	188	1.1876	193	1.1153	194	1.1099
100	215	1.1781	220	1.1165	222	1.0899
120	271	1.1545	276	1.1086	278	1.0880
140	329	1.1337	335	1.0825	336	1.0821
160	388	1.1256	394	1.0835	396	1.0702
180	449	1.1103	455	1.0755	457	1.0644
200	510	1.1114	517	1.0705	519	1.0611

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	8	1.6250	9	1.3152	9	1.3287	9	1.3395
20	26	1.2431	26	1.2677	26	1.2799	26	1.2898
30	46	1.2129	47	1.1510	47	1.1614	47	1.1697
40	68	1.1851	69	1.1431	69	1.1522	70	1.1016
50	92	1.1361	93	1.1062	93	1.1144	93	1.1209
60	117	1.1065	117	1.1214	118	1.0911	118	1.0970
70	142	1.1137	143	1.0951	144	1.0704	144	1.0758
80	169	1.0834	169	1.0961	170	1.0748	170	1.0799
90	196	1.0761	197	1.0636	197	1.0695	197	1.0742
100	223	1.0827	224	1.0719	225	1.0559	225	1.0602
120	280	1.0649	281	1.0569	281	1.0619	282	1.0481
140	338	1.0631	339	1.0568	340	1.0462	340	1.0498
160	398	1.0545	399	1.0496	400	1.0405	400	1.0439
180	459	1.0509	460	1.0469	461	1.0392	462	1.0303
200	521	1.0495	523	1.0357	523	1.0393	524	1.0312

Tabelle 1.5. Der Fall s=1:

Werte der Kantenfunktion

$$N_1(0,n) = \left[\tfrac{1}{2}(n-2)\,\ell n\, n\left\{1 - \frac{(n-2)\ell n\, n - 2}{(n-2)(t(n-1) + \ell n\, n)}\right\}\right] \quad \text{(vgl. (T.5))}$$

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1}$ nach (4.23.1)

für t = 1,2,3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,1,n,N_1(0,n),1} = 1.$

n	t = 2		t = 3	
10	47	0.4693	41	0.9189
20	154	0.6036	134	1.0586
30	303	0.6648	262	1.1511
40	485	0.7271	420	1.1995
50	699	0.7542	605	1.2203
60	940	0.7810	814	1.2344
70	1207	0.7993	1045	1.2458
80	1497	0.8191	1297	1.2519
90	1811	0.8290	1568	1.2600
100	2145	0.8433	1858	1.2636
120	2876	0.8584	2490	1.2703
140	3682	0.8725	3189	1.2689
160	4559	0.8835	3948	1.2712
180	5503	0.8921	4765	1.2718
200	6510	0.9001	5638	1.2691

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	37	1.3025	35	1.5028	34	1.6134	34	1.5827
20	122	1.4276	115	1.6735	112	1.7852	110	1.8552
30	239	1.5144	225	1.7805	219	1.9024	215	1.9766
40	384	1.5408	362	1.7943	352	1.9268	345	2.0172
50	552	1.5763	521	1.8157	507	1.9399	496	2.0512
60	743	1.5801	700	1.8365	682	1.9455	668	2.0420
70	954	1.5840	899	1.8341	875	1.9537	857	2.0500
80	1184	1.5844	1116	1.8278	1086	1.9481	1064	2.0388
90	1431	1.5906	1349	1.8291	1313	1.9451	1287	2.0280
100	1696	1.5863	1599	1.8192	1556	1.9363	1525	2.0190
120	2273	1.5827	2143	1.8086	2086	1.9181	2044	2.0011
140	2911	1.5719	2744	1.7936	2671	1.8999	2616	1.9877
160	3604	1.5657	3398	1.7783	3307	1.8844	3240	1.9652
180	4350	1.5583	4101	1.7668	3992	1.8671	3910	1.9502
200	5146	1.5512	4852	1.7530	4723	1.8509	4626	1.9313

Tabelle 2.1. Der Fall s=2:

Werte der Kantenfunktion

$$N_{t,2}(0,n) = \left[\frac{1}{2} n^{3/2} \left(\frac{2t}{t-1} \ell n\, n\right)^{1/2}\right] \quad \text{(vgl. (T.1*))}$$

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,2,n,N_{t,2}(0,n),1}$ nach (4.24.1)
für t = 2,3,5,10,100 und n = 10(10)100(20)200.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,2,n,N_{t,2}(0,n),1} = 1.$

n	t = 2		t = 3	
10	42	0.9705	40	1.0344
20	144	0.9784	135	1.0133
30	287	1.0105	268	0.9921
40	466	1.0059	431	0.9994
50	676	1.0017	621	1.0044
60	914	0.9988	836	1.0026
70	1177	1.0030	1074	0.9983
80	1465	1.0002	1332	1.0025
90	1775	1.0021	1611	0.9993
100	2107	1.0015	1908	1.0010
120	2832	1.0006	2556	1.0005
140	3633	1.0005	3271	0.9986
160	4505	1.0006	4047	0.9998
180	5444	1.0008	4882	0.9995
200	6447	1.0003	5772	1.0001

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	39	1.0512	39	0.9975	39	0.9769	39	0.9629
20	131	0.9797	128	0.9854	126	1.0168	125	1.0197
30	256	1.0046	249	1.0054	246	1.0037	244	0.9967
40	410	1.0059	398	0.9972	392	1.0051	388	1.0031
50	589	1.0060	570	1.0014	562	0.9943	555	1.0019
60	791	1.0016	764	0.9976	752	0.9963	743	0.9958
70	1014	0.9970	997	1.0005	961	0.9991	949	0.9984
80	1255	1.0031	1209	0.9981	1188	1.0002	1173	0.9972
90	1516	0.9975	1458	0.9979	1432	1.0001	1413	0.9993
100	1793	0.9998	1723	0.9997	1692	0.9998	1669	0.9991
120	2397	0.9985	2300	0.9990	2257	0.9996	2225	0.9995
140	3061	1.0006	2934	1.0005	2878	1.0000	2836	1.0000
160	3783	0.9991	3622	1.0010	3551	1.0013	3498	1.0016
180	4558	0.9993	4361	1.0005	4274	1.0007	4210	0.9986
200	5383	1.0009	5148	1.0001	5044	0.9998	4966	0.9996

Tabelle 2.2. Der Fall s=2:
Werte der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_{t,2}(0,n)$, für die die Erwartungswerte $EY^*_{t,2,n,\tilde{N}_{t,2}(0,n),1}$ alle dem Wert 1 am nächsten kommen (vgl. Abschnitt 5.2.4), und die zugehörigen Erwartungswerte $EY^*_{t,2,n,\tilde{N}_{t,2}(0,n),1}$ nach (4.24.1) für t = 2,3,5,10,100 und n = 10(10)100(20)200.

n	t = 3	
10	91	0.3028
20	318	0.4921
30	653	0.5888
40	1084	0.6511
50	1603	0.6982
60	2206	0.7288
70	2888	0.7529
80	3645	0.7743
90	4476	0.7886
100	5376	0.8040
120	7380	0.8264
140	9644	0.8427
160	12155	0.8569
180	14905	0.8681
200	17886	0.8772

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	71	1.4710	62	2.2015	58	2.5844	56	2.7422
20	246	1.9553	215	2.9242	203	3.3570	194	3.7256
30	505	2.1727	441	3.2935	416	3.8229	399	4.1987
40	838	2.3103	732	3.5161	691	4.0844	663	4.4927
50	1240	2.3915	1083	3.6599	1023	4.2483	981	4.6998
60	1707	2.4393	1491	3.7451	1408	4.3663	1350	4.8446
70	2234	2.4854	1952	3.8126	1843	4.4592	1767	4.9564
80	2820	2.5142	2463	3.8756	2326	4.5309	2230	5.0434
90	3462	2.5377	3024	3.9129	2856	4.5772	2738	5.1024
100	4159	2.5515	3633	3.9362	3431	4.6105	3289	5.1468
120	5709	2.5740	4987	3.9737	4710	4.6585	4515	5.2080
140	7460	2.5843	6517	3.9879	6154	4.6864	5900	5.2386
160	9403	2.5882	8214	3.9950	7757	4.6950	7437	5.2495
180	11530	2.5898	10073	3.9916	9512	4.6960	9119	5.2543
200	13836	2.5871	12087	3.9868	11414	4.6911	10943	5.2543

Tabelle 3.1. Der Fall s=3:

Werte der Kantenfunktion

$$N_{t,3}(0,n) = \left[\tfrac{1}{2} n^{5/3} \left(\frac{t^3}{\binom{t}{3}} \ell n n \right)^{1/3}\right] \quad \text{(vgl. (T.1*))}$$

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,3,n,N_{t,3}(0,n),1}$ nach (4.17.1

für t = 3,5,10,20,100 und n = 10(10)100(20)200.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,3,n,N_{t,3}(0,n),1} = 1.$

n	t = 5		t = 10		t = 20		t = 100	
10	186	0.0902	123	3.5027	108	4.5709	99	5.1807
20	684	0.3087	452	5.5470	397	7.4046	363	8.6012
30	1455	0.4421	963	6.9212	845	9.4978	774	11.1256
40	2483	0.5215	1643	7.9797	1442	11.1427	1320	13.2358
50	3754	0.5811	2484	8.8345	2180	12.5254	1996	15.0018
60	5260	0.6250	3481	9.5271	3055	13.6841	2797	16.5253
70	6994	0.6588	4629	10.1093	4061	14.7191	3719	17.8702
80	8950	0.6858	5923	10.6248	5197	15.6052	4759	19.0695

Tabelle 4.1. Der Fall s=5:

Werte der Kantenfunktion

$$N_{t,5}(0,n) = \left[\tfrac{1}{2} n^{9/5} \left(\frac{t^5}{\binom{t}{5}} \ln n \right)^{1/5}\right] \quad \text{(vgl. (T.1*))}$$

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,5,n,N_{t,5}(0,n),1}$ nach (4.17.1)
für t = 5,10,20,100 und n = 10(10)80.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,5,n,N_{t,5}(0,n),1} = 1.$

n	s = t = 1		s = t = 2		s = t = 3		s = t = 5	
10	11	0.5919	47	0.4693	91	0.3028	186	0.0902
20	29	0.7221	154	0.6036	318	0.4921	684	0.3087
30	51	0.7080	303	0.6648	653	0.5888	1455	0.4421
40	73	0.7827	485	0.7271	1084	0.6511	2483	0.5215
50	97	0.8064	699	0.7542	1603	0.6982	3754	0.5811
60	122	0.8249	940	0.7810	2206	0.7288	5260	0.6250
70	148	0.8354	1207	0.7993	2888	0.7529	6994	0.6588
80	175	0.8378	1497	0.8191	3645	0.7743	8950	0.6858
90	202	0.8530	1811	0.8290	4467	0.7886		
100	230	0.8577	2145	0.8433	5376	0.8040		
120	287	0.8726	2876	0.8584	7380	0.8264		
140	345	0.8931	3682	0.8725	9644	0.8427		
160	406	0.8910	4559	0.8835	12155	0.8569		
180	467	0.9027	5503	0.8921	14905	0.8681		
200	529	0.9135	6510	0.9001	17886	0.8772		

n	s = t = 10	
10	431	0.0002

Tabelle 5.1. Der Fall s=t:

Werte der Kantenfunktion

$N_{t,t}(0,n) = [\frac{1}{2} t n^{2-1/t} (\ell n\, n)^{1/t}]$ (vgl. (T.1*))

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,t,n,N_{t,t}(0,n),1}$ nach (4.17.

für t = 1,2,3 und n = 10(10)100(20)200 bzw. t=5 und n = 10(10)80

bzw. t = n = 10.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,t,n,N_{t,t}(0,n),1} = 1.$

n	s = t = 1		s = t = 2		s = t = 3	
10	9	1.0624	42	0.9705	81	1.0198
20	26	1.0473	144	0.9784	298	1.0108
30	47	0.9673	287	1.0105	624	1.0058
40	69	0.9813	466	1.0059	1047	1.0005
50	92	1.0064	676	1.0017	1559	0.9983
60	117	0.9895	914	0.9988	2154	1.0001
70	142	1.0053	1177	1.0030	2828	1.0023
80	168	1.0106	1465	1.0002	3579	0.9991
90	195	1.0066	1775	1.0021	4402	1.0000
100	223	0.9947	2107	1.0015	5296	0.9993
120	279	1.0038	2832	1.0006	7287	0.9992
140	337	1.0063	3633	1.0005	9537	1.0003
160	397	1.0015	4505	1.0006	12036	1.0003
180	458	1.0012	5444	1.0008	14774	1.0002
200	520	1.0024	6447	1.0003	17743	1.0000

Tabelle 5.2. Der Fall s=t:
Werte der optimalen Kantenfunktion $\tilde{N}_{t,t}(0,n)$, für die die Erwartungswerte $EY^*_{t,t,n,\tilde{N}_{t,t}(0,n),1}$ alle dem Wert 1 am nächsten kommen (vgl. Abschnitt 5.2.4), und die zugehörigen Erwartungswerte $EY^*_{t,t,n,\tilde{N}_{t,t}(0,n),1}$ nach (4.17.1) für t = 1,2,3 und n = 10(10)100(20)200.

n	s = t = 1		s = t = 2		s = t = 3		s = t = 5	
10	10	0.7968	43	0.8489	82	0.9212	167	0.9246
20	27	0.9259	145	0.9341	300	0.9457	647	0.9398
30	48	0.8950	289	0.9605	627	0.9542	1401	0.9619
40	70	0.9275	468	0.9729	1050	0.9675	2411	0.9754
50	94	0.9212	678	0.9777	1562	0.9749	3665	0.9836
60	118	0.9542	916	0.9804	2157	0.9824	5155	0.9848
70	144	0.9452	1180	0.9808	2832	0.9837	6873	0.9858
80	170	0.9579	1468	0.9818	3582	0.9878	8812	0.9894
90	197	0.9602	1778	0.9865	4406	0.9874		
100	225	0.9535	2110	0.9881	5300	0.9886		
120	281	0.9692	2835	0.9903	7291	0.9912		
140	339	0.9768	3637	0.9894	9542	0.9924		
160	399	0.9758	4509	0.9915	12041	0.9939		
180	460	0.9784	5448	0.9931	14779	0.9948		
200	522	0.9819	6451	0.9936	17748	0.9954		

n	s = t = 10	
10	388	0.9143

Tabelle 5.3. Der Fall s=t:

Werte der Kantenfunktion

$$N_{t,t}(0,n) = \left[\tfrac{1}{2}\, tn(n-1)^{1-1/t}\left(\ell n\, n\left(1 - \frac{n\,\ell n\, n - 2}{n(2(n-1) + \ell n\, n)}\right)\right)^{1/t}\right]$$ (vgl. (T.

und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,t,n,N_{t,t}(0,n),1}$ nach (4.17.1)

für t = 1,2,3 und n = 10(10)100(20)200 bzw. t=5 und n = 10(10)80

bzw. t = n = 10.

Es ist $\lim_{n\to\infty} EY^*_{t,t,n,N_{t,t}(0,n),1} = 1.$

n	s = t = 1		s = t = 2		s = t = 3	
10	9	1.0624	40	1.2489	79	1.2363
20	26	1.0473	141	1.1211	295	1.1146
30	46	1.0452	284	1.0896	619	1.0966
40	68	1.0382	463	1.0573	1041	1.0692
50	92	1.0064	672	1.0511	1551	1.0628
60	116	1.0261	909	1.0463	2145	1.0546
70	142	1.0053	1172	1.0410	2818	1.0499
80	168	1.0106	1459	1.0378	3567	1.0454
90	195	1.0066	1768	1.0392	4389	1.0416
100	222	1.0160	2100	1.0333	5282	1.0373
120	279	1.0038	2824	1.0286	7270	1.0339
140	337	1.0063	3624	1.0257	9519	1.0292
160	397	1.0015	4495	1.0238	12016	1.0263
180	458	1.0012	5433	1.0223	14751	1.0251
200	520	1.0024	6435	1.0204	17718	1.0229

Tabelle 5.4. Der Fall s=t:
Werte der Kantenfunktion

$$N_{t,t}(0,n) = \left[\tfrac{1}{2}\, t(n-1)n^{1-1/t}\left\{\ell n\, n\left(1 - \frac{(n-1)\ell n\, n - 2}{(n-1)(2(n-1)+\ell n\, n)}\right)\right\}^{1/t}\right]$$

(vgl. (T.4*)) und zugehörige Erwartungswerte $EY^*_{t,t,n,N_{t,t}(0,n),1}$ nach (4.17.1) für t = 1,2,3 und n = 10(10)100(20)200.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} EY^*_{t,t,n,N_{t,t}(0,n),1} = 1$.

Zusammenfassung

Einen Multigraphen mit der nichtleeren Knotenmenge $G = \{x_1,\dots,x_n\}$ und N-elementiger Kantenmenge $H \subset {}^tK = \{e_{ij\ell} = \{x_i,x_j,\ell\} : x_i,x_j \in G, i<j, \ell \in \{1,\dots,t\}\}$ bezeichnen wir als ungerichteten, vollständig indizierten Multigraphen $\Gamma_{t,n,N} = (G,H)$. $e_{ij1},\dots,e_{ijt}$ sind dabei alle möglichen unterscheidbaren Kanten zwischen je zwei Knoten x_i und x_j, und Schlingen sind lt. Def. verboten. Für t=1 liegt ein einfacher Graph vor; für t>1 kann man sich einen Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ entstanden denken durch Übereinanderschichtung von t einfachen ungerichteten, indizierten Graphen mit derselben Knotenmenge G und N_ℓ Kanten je "Schicht", $N_1+\dots+N_t = N$.

Zwei Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$ heißen s-verbunden, wenn zwischen ihnen mindestens s Kanten liegen. Ein Teilmultigraph von $\Gamma_{t,n,N}$ heißt s-zusammenhängend, wenn seine Knoten nicht in zwei Mengen G_1 und G_2 so aufteilbar sind, daß kein Paar von Knoten - einer aus G_1 und einer aus G_2 - s-verbunden ist. Ist ein Teilmultigraph bzgl. dieser Eigenschaft maximal, so heißt er s-Komponente. Ein Knoten hat den s-Grad k, wenn es genau k Knoten gibt, mit denen er s-verbunden ist; er heißt s-isoliert, wenn sein s-Grad Null ist. (Diese Definitionen sind nur sinnvoll für natürliche Zahlen $1 \leq s \leq t$. Für t=s=1 entsprechen sie den bekannten Begriffen "verbunden", "isoliert", "Komponente" usw.)

Sei $\Omega_{t,n,N}$ die Menge aller $\binom{t\binom{n}{2}}{N}$ verschiedenen vollständig indizierten Multigraphen $\Gamma_{t,n,N}$ mit den Knoten $x_1,\dots,x_n$ und N Kanten, $1 \leq N \leq t\binom{n}{2}$. Jedes Element $\Gamma_{t,n,N}$ in $\Omega_{t,n,N}$, das wir als Zufallsmultigraphen bezeichnen, besitze die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden. (Das entspricht einem Modell, in dem N Kanten "zufällig" ohne Zurücklegen zwischen n gegebenen Knoten gezogen oder verteilt werden, wobei zwischen je zwei Knoten t unterscheidbare Plätze oder Schichten für Kanten zugelassen sind. Dies ist also eine Verallgemeinerung eines üblichen Wahrscheinlichkeitsmodells für einfache Zufallsgraphen, wie es in einer Reihe von Arbeiten, etwa in Erdös und Rényi (1959,1960), benutzt wird.)

Für die natürlichen Parameter t,s,n,N werden die Verteilungen bzw. Verteilungsparameter der auf $\Omega_{t,n,N}$ definierten Zufallsvariablen

"Anzahl der s-verbundenen Knotenpaare in $\Gamma_{t,n,N}$",
"s-Grad eines Knotens x_i in $\Gamma_{t,n,N}$",
"Anzahl der s-Komponenten mit genau m Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$",
"Anzahl der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N}$"

hergeleitet. Weiter wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß ein Zufallsmultigraph $\Gamma_{t,n,N}$ ganz s-zusammenhängend ist.

Daran anschließend werden Grenzwertsätze für Folgen $(\Gamma_{t,n,N})$ bewiesen (t fest, $n \to \infty$, N=N(n); jedes Element $\Gamma_{t,n,N}$ einer solchen Folge ist also einer anderen Grundmenge $\Omega_{t,n,N}$ entnommen). Es wird gezeigt, daß für solche Folgen, in denen $N(n) = \left[\frac{1}{2} n^{2-1/s} \left(\frac{t^s}{\binom{t}{s}} \left(\ell n\, n + c + o(1)\right)\right)^{1/s}\right]$ erfüllt ist, die nachstehenden Aussagen gelten.

1. Der Erwartungswert der Zahl der s-verbundenen Paare in $\Gamma_{t,n,N(n)}$ ergibt sich zu $\frac{1}{2} n(\ell n\, n + c + o(1))$, der Erwartungswert des s-Grades eines bel. Knotens x_i zu $\ell n\, n + c + o(1)$.

2. Der Erwartungswert der Zahl der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$ konvergiert gegen e^{-c}; weiter ist diese Anzahl für $n \to \infty$ asymptotisch Poissonverteilt mit Parameter $\lambda = e^{-c}$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß alle Knoten, die nicht s-isoliert sind, zusammen in einer einzigen s-Komponenten liegen, strebt gegen 1.

4. Die Wahrscheinlichkeit, daß $\Gamma_{t,n,N(n)}$ ganz s-zusammenhängend ist, konvergiert gegen $exp(-e^{-c})$.

Darüber hinaus gilt:

5. Wählt man zwischen der Knoten- und der Kantenzahl einen anderen als den oben genannten funktionalen Zusammenhang, so konvergiert die Folge der Erwartungswerte der Anzahlen der s-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$ nicht gegen eine positive Konstante. Ebenso konvergiert die Folge der Wahrscheinlichkeiten, daß ein solcher Zufallsmultigraph s-zusammenhängend ist, nicht gegen eine Zahl aus dem offenen Intervall (0,1).

In den beiden Fällen s=1 und s=t werden Folgen N(n) angegeben, für die die Erwartungswerte der Anzahlen der 1- bzw. t-isolierten Knoten in $\Gamma_{t,n,N(n)}$ auch für kleine n bereits zufriedenstellende Approximationen von e^{-c} sind (des in 2. genannten Grenzwertes) für bel. c. Hierzu sind einige Tabellen mit numerischen Ergebnissen für c=0 beigefügt.

Literatur

Die im folgenden angegebene Literatur ist aufgeteilt in zwei Teile. Im ersten Teil sind Arbeiten angegeben, die im Text zitiert wurden. Der daran anschließende zweite Teil soll als eine Bibliographie von Arbeiten über Zufallsgraphen, Zufallsmultigraphen und verwandte Gebiete verstanden werden. Eine weitere Bibliographie - allerdings auf dem Stand von 1974 - ist die Arbeit von S c h ü r g e r und T a u t u (1974). Umfangreiche Literaturhinweise zu Anwendungen der Theorie der Zufallsgraphen auf Probleme der Clusteranalyse findet der interessierte Leser in L i n g (1971) und G o d e h a r d t (1974).

Zitierte Literatur

Austin, T.L., Fagen, R.E., Penney, W.F., Riordan, J.: The number of components in random linear graphs;
Ann. Math. Statist., 30(1959), 747 - 754

Bollobás, B., Sauer, N.: Uniquely colourable graphs with large girth;
Canad. J. Math., 28.6(1976), 1340 - 1344

Burtin, Yu.D.: On extreme metric characteristics of a random graph. II. Limit distributions;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 20.1(1975), 83 - 101

Cayley, A.: A theorem on trees;
Quart. J. Pure Appl. Math., 23(1889), 376 - 378

Erdös, P.: Problems and results in graph theory and combinatorial analysis;
Proc. 5th British Combin. Conf., 1975;
Congressus Numerantium, XV, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1975, 169 - 192

Erdös, P., Rênyi, A.: On random graphs. I;
Publ. Math. Debrecen, 6(1959), 290 - 297

Erdös, P., Rênyi, A.: On the evolution of random graphs;
Bull. Inst. Inter. Statist. Tokyo, 38.4(1960), 343 - 347

Erdös, P., Rênyi, A.: On the evolution of random graphs;
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 5(1960), 17 - 61

Erdös, P., Spencer, J.: Probabilistic methods in combinatorics;
Academic Press, New York, 1974

Gilbert, E.N.: Enumeration of labelled graphs;
Canad. J. Math., 8(1956), 405 - 411

Gilbert, E.N.: Random graphs;
Ann. Math. Statist., 30(1959), 1141 - 1144

Godehardt, E.: Heuristische und wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze zur Cluster Analysis;
Diplomarbeit, Inst. f. Statist. u. Dokument. der Univ., Düsseldorf, 1974

Godehardt, E., Steinebach, J.: On a lemma of P. Erdös and A. Rényi about random graphs;
eingereicht bei Publ. Math. Debrecen (1978)

Halder, H.R., Heise, W.: Einführung in die Kombinatorik;
Hanser, München, 1976

Harary, F.: Graphentheorie;
Oldenbourg, München, 1974

Hein, O.: Graphentheorie für Anwender;
Bibliograph. Inst., Mannheim, 1977

Kel'mans, A.K.: Asymptotic formulas for the probability of k-connectedness of random graphs;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 17(1972/73), 243 - 254

Laue, R.: Elemente der Graphentheorie und ihre Anwendung in den biologischen Wissenschaften;
Vieweg, Braunschweig, 1971

Lehmann, E.L.: Some concepts of dependence;
Ann. Math. Statist., 37.5(1966), 1137 - 1153

Ling, R.F.: Cluster analysis;
Techn. Rept. No. 18, Contract NONR 609(52), Dept. of Statist., Yale Univ., New Haven, Conn., 1971

Ling, R.F.: The expected number of components in random linear graphs;
Ann. Probab., 1.5(1973), 876 - 881

Naus, J.I., Rabinowitz, L.: The expectation and variance of the number of components in random linear graphs;
Ann. Probab., 3.1(1975), 159 - 161

Rényi, A.: On connected graphs. I;
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 4(1959), 385 - 388

Riddell, R.J., Uhlenbeck, G.E.: On the virial development of the equation of state of monoatomic gases;
J. Chem. Phys., 21(1953), 2056 - 2064

Stepanov, V.E.: Limit distributions of certain characteristics of random graphs;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 14(1969), 612 - 626

Stepanov, V.E.: On the probability of connectedness of the random graph $G_m(t)$;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 15(1970/71), 55 - 67

Uhlenbeck, G.E.: Successive approximation methods in classical statistical mechanics;
Physica, 26(1960), 17 - 27

Witting, H.: Mathematische Statistik;
B.G. Teubner, Stuttgart, 1969

Bibliographie

Bloom, G.S., Golomb, S.W.: Applications of numbered undirected graphs;
Proc. IEEE, 65.4(1977), 562 - 570

Bollobás, B.: On complete subgraphs of different orders;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 79(1976), 19 - 24

Bollobás, B.: Complete subgraphs are elusive;
J. Combin. Theory, B-21.1(1976), 1 - 7

Bollobás, B., Daykin, D.E., Erdös, P.: Sets of independent edges of a hypergraph;
Quart. J. Math., 27(1976), 25 - 32

Bollobás, B., Eldridge, S.E.: Maximal matchings in graphs with given minimal and maximal degrees;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 79(1976), 221 - 234

Bollobás, B., Erdös, P.: Cliques in random graphs;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 80.3(1976), 419 - 427

Bollobás, B., Erdös, P.: On a Ramsey - Turán type problem;
J. Combin. Theory, B-21.2(1976), 166 - 168

Bollobás, B., Erdös, P., Simonovits, M.: On the structure of edge graphs. II;
J. London Math. Soc.(2), 12.2(1975/76), 219 - 224

Bollobás, B., Erdös, P., Szemerédi, E.: On complete subgraphs of r-chromatic graphs;
Discrete Math., 13.2(1975), 97 - 107

Bondy, J.A.: Properties of graphs with constraints on degrees;
Stud. Sci. Math. Hung., 4(1969), 473 - 475

Bondy, J.A.: Large cycles in graphs;
Discrete Math., 1(1971), 121 - 132

Bondy, J.A., Chvátal, V.: A method in graph theory;
Discrete Math., 15(1976), 111 - 135

Bondy, J.A., Erdös, P.: Ramsey numbers for cycles in graphs;
J. Combin. Theory, B-14(1973), 46 - 54

Bondy, J.A., Murty, U.S.R.: Graph theory with applications;
Macmillan Press, London, 1976

Bondy, J.A., Simonovits, M.: Cycles of even length in graphs;
J. Combin. Theory, B-16(1974), 97 - 105

Bose, N.K., Flick, R., Sun, F.K.: General solution to the spanning tree enumeration problem in multigraph wheels;
IEEE Trans. Circuit Theory, CT-20(1973), 69 - 70

Bose, R.C.: Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced design;
Pacific J. Math., 13(1963), 389 - 419

Bose, R.C.: Characterization problems of combinatorial graph theory;
Proc. Internat. Symp. Combin. Math. Appl., Colorado State Univ., Fort Collins, Colo., 1971;
North - Holland, Amsterdam, 1973, 31 - 51

Bose, R.C.: Designs and multigraphs;
Sankhyā, A-37.3(1975), 315 - 333

Burr, S.A.: Generalized Ramsey theory for graphs, a survey;
in: Bari, R., Harary, F.(ed.): Graphs and combinatorics (Lecture Notes in Math., 406);
Springer, Berlin, 1974

Burr, S.A., Erdös, P., Faudree, R.J., Rousseau, C.C., Schelp, R.H.:
Ramsey - minimal graphs for multiple copies;
Proc. Konin. Neder. Akad. Wetensch., A-81.2(1978), 187 - 195

Burr, S.A., Erdös, P., Spencer, J.H.:
Ramsey theorems for multiple copies of graphs;
Trans. Amer. Math. Soc., 209(1975), 87 - 99

Burr, S.A., Roberts, J.A.: On Ramsey numbers for stars;
Utilitas Math., 4(1973), 217 - 220

Burr, S.A., Roberts, J.A.: On Ramsey numbers for linear forests;
Discrete Math., 8(1974), 245 - 250

Burtin, Yu.D.: On extreme metric parameters of a random graph. I. Asymptotic estimates;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 19.4(1974), 710 - 725

Burtin, Yu.D.: Asymptotic estimates of the degree of connectivity of a random graph;
Cybernetics, 9.3(1975), 505 - 510

Busacker, R.G., Saaty, T.L.: Finite graphs and networks;
McGraw - Hill, New York, 1965

Busolini, D.T.: On a problem of C.C. Chen and D.E. Daykin;
J. Combin. Theory, B-24(1978), 286 - 289

Busolini, D.T., Erdös, P.: On a problem in extremal graph theory;
J. Combin. Theory, B-23(1977), 251 - 254

Cayley, A.: On the theory of the analytic forms called trees;
Philos. Mag., 13(1857), 172 - 176

Cayley, A.: On the analytical forms called trees;
Amer. J. Math., 4(1881), 266 - 268

Chartrand, G., Harary, F.: Graphs with prescribed connectivities;
in: Erdös, P., Katona, G. (ed.): Theory of graphs;
Academic Press, New York, 1968, 61 - 63

Chartrand, G., Kronk, H.V.: Randomly traceable graphs;
SIAM J. Appl. Math., 16(1968), 696 - 700

Chartrand, G., Schuster, S.: On the existence of specified cycles in complementary graphs;
Bull. Amer. Math. Soc., 77(1971), 995 - 998

Christofides, N.: Graph theory - an algorithmic approach;
Academic Press, New York, 1975

Christofides, N., Brooker, P.: The optimal partition of graphs;
SIAM J. Appl. Math., 30.1(1976), 55 - 69

Chung, F.R.K.: Optimal rearrangeable graphs;
Bell Syst. Techn. J., 54.9(1975), 1647 - 1661

Chvátal, V.: Degrees and matchings;
J. Combin. Theory, B-20(1976), 128 - 138

Chvátal, V., Erdös, P.: A note on Hamiltonian circuits;
Discrete Math., 2(1972), 111 - 113

Chvâtal, V., Harary, F.: Generalized Ramsey theory for graphs;
Bull. Amer. Math. Soc., 78(1972), 423 - 426

Chvâtal, V., Harary, F.: Generalized Ramsey numbers for graphs. II.
Small diagonal numbers;
Proc. Amer. Math. Soc., 32(1972), 389 - 394

Chvâtal, V., Harary, F.: Generalized Ramsey theory for graphs. III.
Small offdiagonal numbers;
Pacific J. Math., 41(1972), 335 - 345

Chvâtal, V., Harary, F.: Generalized Ramsey theory for graphs. I.
Diagonal numbers;
Per. Math. Hung., 3(1973), 113 - 122

Clark, J.A., Hastings, N.A.J.: Decision networks;
Oper. Res. Quart., 28.1(1977), 51 - 68

Eberl, W., Hafner, R.: Die asymptotische Verteilung von Koinzidenzen;
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 18(1971), 322 - 332

Edelberg, M., Garey, M.R., Graham, R.L.: On the distance matrix of a tree;
Discrete Math., 14.1(1976), 23 - 39

Eigener, M.: Konstruktion von 2-Stichprobentests mit Hilfe clusteranalytischer Methoden;
Diplomarbeit, Inst. f. Math. Stochast., Hamburg, 1976

Erdös, P.: Some remarks on the theory of graphs;
Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 292 - 294

Erdös, P.: Graph theory and probability;
Canad. J. Math., 11(1959), 34 - 38

Erdös, P.: Graph theory and probability. II;
Canad. J. Math., 13(1961), 346 - 352

Erdös, P.: Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory;
Proc. 5th Southeast. Conf. Combin. Graph Theory Comput.,
Boca Raton, 1974;
Congressus Numerantium, XIV, Utilitas Math., Winnipeg, Man.,
1974, 39 - 51

Erdös, P., Faudree, R.J., Rousseau, C.C., Schelp, R.H.: Generalized Ramsey theory for multiple colors;
J. Combin. Theory, B-20(1976), 250 - 264

Erdös, P., Faudree, R.J., Rousseau, C.C., Schelp, R.H.: The size Ramsey number;
Period. Math. Hung., 9.1-2(1978), 145 - 161

Erdös, P., Gallai, T.: On maximal paths and circuits of graphs;
Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10(1959), 337 - 356

Erdös, P., Gallai, T.: Graphs with prescribed degrees of vertices;
Nat. Lapok, 11(1960), 264 - 274

Erdös, P., Graham, R.L., Szemerédi, E.: On sparse graphs with dense long paths;
Comput. Math. Appl., 1.3-4(1975), 365 - 369

Erdös, P., Hobbs, A.M.: A class of Hamiltonian regular graphs;
J. Graph Theory, 2(1978), 129 - 135

Erdös, P., Katona, G. (ed.): Theory of graphs;
Academic Press, New York, 1968

Erdös, P., Rényi, A.: On a classical problem of probability theory;
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 6(1961), 215 - 219

Erdös, P., Rényi, A.: On the strength of connectedness of a random graph;
Acta Math. Acad. Sci. Hung., 12(1961), 261 - 267

Erdös, P., Rényi, A., Sós, V.T.: On a problem of graph theory;
Studia Sci. Math. Hung., 1(1966), 215 - 235

Erdös, P., Rényi, A., Sós, V.T.: Combinatorial theory and its applications, I - III;
North - Holland, Amsterdam, 1970

Erdös, P., Stone, A.H.: On the structure of linear graphs;
Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946), 1087 - 1091

Erdös, P., Wilson, R.J.: On the chromatic index of almost all graphs;
J. Combin. Theory, B-23(1977), 255 - 257

Even, S., Tarjan, R.E.: Network flow and testing graph connectivity;
SIAM J. Comput., 4.4(1975), 507 - 518

Faudree, R.J., Lawrence, S.L., Parsons, T.D., Schelp, R.H.: Path - cycle Ramsey numbers;
Discrete Math., 10(1974), 269 - 277

Faudree, R.J., Rousseau, C.C., Schelp, R.H.: Path length distributions. I;
Discrete Math., 6(1973), 35 - 52

Faudree, R.J., Schelp, R.H.: Path connected graphs;
Acta Math. Budapest, 25(1974), 313 - 319

Faudree, R.J., Schelp, R.H.: All Ramsey numbers for cycles in graphs;
Discrete Math., 8(1974), 313 - 329

Faudree, R.J., Schelp, R.H.: The entire graph of a bridgeless connected plane graph is panconnected;
J. London Math. Soc. (2), 12(1975), 59 - 66

Ford, G.W., Uhlenbeck, G.E.: Combinatorial problems in the theory of graphs. I;
Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42(1956), 122 - 128

Godehardt, E.: An extension of the theorems of Erdös - Rényi - type to random multigraphs;
6th Conf. on Probab. Theory, Brasov, 10. - 15.9.1979

Gray, P.M.D., Murray, A.M., Young, N.A.: Wright's formula for the number of connected sparsely edged graphs;
J. Graph Theory, 1.4(1977), 331 - 334

Greene, C., Iba, G.A.: Cayley's formula for multidimensional trees;
Discrete Math., 13.1(1975), 1 - 11

Greenwood, R.E., Gleason, A.M.: Combinatorial relations and chromatic graphs;
Canad. J. Math., 7(1955), 1 - 7

Grimmett, G.R.: An upper bound for the number of spanning trees of a graph;
Discrete Math., 16.4(1976), 323 - 324

Grimmett, G.R., McDiarmid, C.J.H.: On colouring random graphs;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 77(1975), 313 - 324

Hafner, R.: Die asymptotische Verteilung von mehrfachen Koinzidenzen;
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 21(1972), 96 - 108

Hafner, R.: The asymptotic distribution of random clumps;
Computing, 10(1972), 335 - 351

Harary, F.: The number of linear, directed, rooted, and connected graphs;
Trans. Amer. Math. Soc., 78(1955), 445 - 463

Harary, F.(ed.): Graph theory and theoretical physics;
Academic Press, New York, 1967

Harary, F.: Proof techniques in graph theory;
(Proc. 2nd Ann Arbor Graph Theory Conference, Feb. 1968);
Academic Press, New York, 1969

Harary, F.: Graph theory and applications;
Springer, Berlin 1972

Harary, F.: New directions in the theory of graphs;
Academic Press, New York, 1973

Harary, F., Norman, R.Z.: Graph theory as a mathematical model in social sciences;
Monograph No. 2, Res. Center for Group Dynamics: Inst. for Social Res., Ann Arbor, Mich., 1953

Harary, F., Norman, R.Z., Cartwright, D.: Structural models: An introduction to the theory of directed graphs;
Wiley, New York, 1965

Harary, F., Palmer, E.H.: Graphical enumeration;
Academic Press, New York, 1973

Harary, F., Prins, G.: The number of homeomorphically irreducible trees, and other species;
Acta Math., 101(1959), 141 - 162

Harris, B.(ed.): Graph theory and its applications;
Academic Press, New York, 1970

Hotz, G.: Schranken für balanced trees bei ausgewogenen Verteilungen;
Theoret. Comput. Sci., 3.1(1977), 51 - 59

Kaplan, N.: A generalization of a result of Erdös and Rényi and a related problem;
Preprint 2, Inst. Math. Statist., Univ. of Copenhagen, 1976

Klee, V., Quaife, H.: Minimum graphs of specified diameter, connectivity, and valence;
Math. Oper. Res., 1.1(1976), 28 - 31

Kleitman, D.J.: Methods for investigating connectivity of large graphs;
IEEE Trans. Circuit Theory, CT-16(1969), 232 - 233

Kleitman, D.J., Golden, B.: Counting trees in a certain class of graphs;
Amer. Math. Monthly, 82(1875), 40 - 44

Kleitman, D.J., Wang, D.L.: Decomposition of a graph realizing a degree sequence into disjoint spanning trees;
SIAM J. Appl. Math., 30.2(1976), 206 - 221

Korshunov, A.D.: Solution of a problem of P. Erdös and A. Rényi on Hamiltonian cycles in undirected graphs;
Soviet Math. Dokl., 17.3(1976), 760 - 764

Kovalenko, I.N.: Theory of random graphs;
Cybernetics, 7.4(1974), 575 - 579

Krafft, O., Sonnemann, E.: Eine graphentheoretische Behandlung eines Problems der Informationstheorie;
Mathematikunterricht, 20.3(1974), 49 - 62

Ling, R.F.: A probability theory of cluster analysis;
J. Amer. Statist. Accoc., 68(1973), 159 - 164

Ling, R.F.: An exact probability distribution of the connectivity of random graphs;
J. Math. Psychol., 12(1975), 90 - 98

Ling, R.F., Killough, G.G.: Probability tables for cluster analysis based on a theory of random graphs;
J. Amer. Statist. Assoc., 71(1976), 293 - 300

Liskovets, V.A.: On a recurrence method of counting graphs with labelled vertices (russ.);
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 184(1969), 1284 - 1287

Liskovets, V.A.: The number of maximal vertices of a random acyclic digraph;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 20(1975), 401 - 409

Mader, W.: Über den Zusammenhang symmetrischer Graphen;
Archiv Math., 21.3(1970), 331 - 336

Mader, W.: Existenz gewisser Konfigurationen in n-gesättigten Graphen und in Graphen genügend großer Kantendichte;
Math. Ann., 194(1971), 295 - 312

Mader, W.: Ecken vom Grad n in minimalen n-fach zusammenhängenden Graphen;
Archiv Math., 13.2(1872), 219 - 224

Mader, W.: Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Teilgraphen, die zu einem vollständigen Graphen homöomorph sind;
Math. Nachr., 53(1972), 145 - 150

Mader, W.: Über die Anzahl der von den 1-Faktoren eines Graphen überdeckten Ecken;
Math. Nachr., 56(1973), 195 - 200

Mader, W.: 1-Faktoren von Graphen;
Math. Ann., 201(1973), 269 - 282

Mader, W.: Ein Extremalproblem des Zusammenhangs von Graphen;
Math. Z., 131(1973), 223 - 231

Mader, W.: Grad und lokaler Zusammenhang in endlichen Graphen;
Math. Ann., 205(1973), 9 - 11

Mader, W.: Ecken vom Innen- und Außengrad n in minimal n-fach kantenzusammenhängenden Digraphen;
Archiv Math., 25.1(1974), 107 - 112

Mader, W.: Kreuzungsfreie a,b - Wege in endlichen Graphen;
Abh. Math Seminar Univ. Hamburg, 42(1974), 187 - 204

Mader, W.: Ecken mit starken Zusammenhangseigenschaften in endlichen Graphen;
Math. Ann., 216(1975), 123 - 126

Mader, W.: Über die Anzahl der 1-Faktoren in 2-fach zusammenhängenden Graphen;
Math. Nachr., 74(1976), 217 - 232

Mader, W.: Endlichkeitssätze für k-kritische Graphen;
Math. Ann., 229.2(1977), 143 - 153

Müller, V.: Probabilistic reconstruction from subgraphs;
Comm. Math. Univ. Carolinae, 17.4(1976), 709 - 719

Myers, B.R.: On spanning trees, weighted compositions, Fibonacci numbers, and resistor networks;
SIAM Rev., 17.3(1975), 465 - 474

Palâsti, I.: On the connectedness of bichromatic random graphs;
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 8(1963), 431 - 441

Palâsti, I.: On the strong connectedness of directed random graphs;
Studia Sci. Math. Hung., 1(1966), 205 - 214

Parsons, T.D.: The Ramsey numbers $r(P_m,K_n)$;
Discrete Math., 6(1973), 159 - 162

Parsons, T.D.: Path - star Ramsey numbers;
J. Combin. Theory, B-17(1974), 51 - 58

Parsons, T.D.: Ramsey graphs and block design. I;
Trans. Amer. Math. Soc., 209(1975), 33 - 44

Parsons, T.D.: Ramsey graphs and block design;
J. Combin. Theory, A-20(1976), 12 - 19

Pólya, G.: Partitions of a finite set into structured subsets;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 77(1975), 453 - 458

Pósa, L.: On circuits of finite graphs;
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 8(1963), 355 - 361

Pósa, L.: Hamiltonian circuits in random graphs;
Discrete Math., 14(1976), 359 - 364

Rényi, A.: Some remarks on the theory of trees;
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 4(1959), 73 - 85

Riordan, J.: Enumerations of linear graphs for mappings of finite sets;
Ann. Math. Statist., 33.1(1962), 178 - 185

Riordan, J.: Combinatorial identities;
Wiley, New York, 1968

Riordan, J.: Ballots and trees;
J. Combin. Theory, 6(1969), 408 - 411

Riordan, J.: Ballots and plane trees;
J. Combin. Theory, B-11(1971), 85 - 88

Riordan, J.: The distribution of crossings of chords joining pairs of 2n points on a circle;
Math. Comput., 29(1975), 215 - 222

Riordan, J.: Enumeration of plane trees by branches and endpoints;
J. Combin. Theory, A-19(1975), 214 - 222

Riordan, J.: The blossoming of Schröder's fourth problem;
Acta Math. Uppsala, 137(1976), 1 - 16

Robinson, R.W., Schwenk, A.J.: The distribution of degrees in a large random tree;
Discrete Math., 12.4(1975), 359 - 372

Schultz, J.V., Hubert, L.J.: Data analysis and the connectivity of random graphs;
J. Math. Psychol., 10(1973), 421 - 428

Schultz, J.V., Hubert, L.J.: An empirical evaluation of an approximate result in random graph theory;
Brit. J. Math. Statist. Psychol., 28(1975), 103 - 111

Schürger, K.D.: Über die Entwicklung zufälliger p-partiter Graphen;
Dissertation, Inst. f. Dokument., Inform. u. Statist., Heidelberg, 1974

Schürger, K.D.: Limit theorems for complete subgraphs of random graphs;
Colloq. on Inform. Theory, Keszthely, 25. - 29.8.1975

Schürger, K.D.: Limit theorems for complete subgraphs of random graphs;
Per. Math. Hungar., 10.1(1979),47 - 53

Schürger, K.D., Tautu, P.: Random graphs (and allied topics): a bibliography;
DKFZ Heidelberg, Inst. f. Dokument., Inform. u. Statist., Heidelberg, 1974

Sobel, M., Uppuluri, V.R.R.: Sparse and crowded cells and Dirichlet distributions;
Ann. Statist., 2.5(1974), 977 - 987

Stepanov, V.E.: Combinatorial algebra and random graphs;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 14(1969), 373 - 399

Stepanov, V.E.: Phase transitions in random graphs;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 15(1970/71), 187 - 203

Stepanov, V.E.: Structure of the random graph $G_m(x|h)$;
SIAM J. Theory Probab. Appl., 17(1972/73), 227 - 242

Tainiter, M.: Statistical theory of connectivity. I. Basic definitions and properties;
Discrete Math., 13(1975), 391 - 398

Tainiter, M.: A new deterministic network reliability measure;
Networks, 6(1976), 191 - 204

Tainiter, M.: Random graphs as Markov processes on the lattice of partitions;
Preprint 1977, eingereicht bei J. Stochast. Proc.

Waller, D.A.: Double covers of graphs;
Bull. Austral. Math. Soc., 14(1976), 233 - 248

Waller, D.A.: General solution to the spanning tree enumeration problem in arbitrary multigraph joins;
IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-23.7(1976), 467 - 469

Walther, H., Voss, H.J.: Über Kreise in Graphen;
VEB deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1974

White, H.C.: Probabilities of homomorphic mappings from multiple graphs;
J. Math. Psychol., 16(1977), 121 - 134

Whitney, H.: Congruent graphs and the connectivity of graphs;
Amer. J. Math., 54(1932), 150 - 168

Wright, E.M.: Asymptotic enumeration of connected graphs;
Proc. Royal Soc. Edinburgh, A-68(1970), 198 - 308

Wright, E.M.: Graphs on unlabelled nodes with a given number of edges;
Acta Math., 126(1971), 1 - 9

Wright, E.M.: The number of unlabelled graphs with many nodes and edges;
Bull. Amer. Math. Soc., 78(1972), 1032 - 1034

Wright, E.M.: The probability of connectedness of an unlabelled graph can be less for more edges;
Proc. Amer. Math. Soc., 35(1972), 21 - 25

Wright, E.M.: For how many edges is a digraph almost certainly Hamiltonian;
Proc. Amer. Math. Soc., 41(1973), 384 - 388

Wright, E.M.: The probability of connectedness of a large unlabelled graph;
Bull. Amer. Math. Soc., 79(1973), 767 - 769

Wright, E.M.: For how many edges is a graph almost certainly Hamiltonian;
J. London Math. Soc.(2), 8(1974), 44 - 48

Wright, E.M.: Large cycles in large labelled trees;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 78.7(1975), 7 - 17

Wright, E.M.: The evolution of unlabelled trees;
J. London Math. Soc.(2), 14(1976), 554 - 558

Wright, E.M.: The proportion of unlabelled graphs which are Hamiltonian;
Bull. London Math. Soc., 8.3(1976), 241 - 244

Wright, E.M.: Large cycles in large labelled graphs. II;
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 81.1(1977), 1 - 2

Wright, E.M.: The number of connected sparsely edged graphs;
J. Graph Theory, 1.4(1977), 317 - 330

Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K., Hamada, N.: On claw decomposition of complete graphs and complete bigraphs;
Hiroshima Math. J., 5.1(1975), 33 - 42

Yoshioka, C.: On the quasi - spannability of graphs;
Sci. Repts. Niigata Univ. (J. Fac. Sci.), A-14(1977), 35 - 40

Herrn Prof. Dr. H. Klinger
gilt mein besonderer Dank für die Anregung dieser Arbeit und für seine Betreuung und die vielen nützlichen Diskussionen, die zur Entwicklung des hier dargelegten Wahrscheinlichkeitsmodells führten.

Den Herren Prof. Dr. J. Krauth und Dr. J. Steinebach
danke ich für wertvolle Hinweise, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Herrn cand. math. M. Schnell
sei an dieser Stelle gedankt für das Erstellen der FORTRAN - IV - und Assembler - Programme zur Berechnung der Tabellenwerte.

Den Herren Prof. Dr. H.J. Jesdinsky und Prof. Dr. V. Weidtman
danke ich dafür, daß ich diese theoretischen Untersuchungen neben meiner Tätigkeit am Institut für Medizinische Statistik und Biomathematik der Medizinischen Einrichtungen der Universität Düsseldorf sowie am Institut für Medizinische Dokumentation und Statistik der Medizinischen Einrichtungen der Universität Köln durchführen durfte.

Lebenslauf in Stichworten

Staatsangehörigkeit: deutsch

17.7.1949	geboren in Leinefelde/Thüringen
April 1956 - April 1960	Besuch der Volksschule 19 in Krefeld
April 1960 - Mai 1968	Besuch des Fichte - Gymnasiums in Krefeld
Mai 1968	Abitur am Fichte - Gymnasium
Oktober 1968 - Juli 1974	Studium der Mathematik und Physik an der Universität Düsseldorf
Oktober 1970	Diplomvorprüfung
September 1974	Diplomhauptprüfung 1. Referent der Arbeit: Prof. Dr. Klinger 2. Referent der Arbeit: Prof. Dr. Krauth
1.10.1974 - 30.9.1975	Wiss. Hilfskraft am Inst. f. Statist. u. Dokument. der Univ. Düsseldorf (Direktor: Prof. Dr. Klinger)
1.10.1975 - 31.12.1976	Verw. Wiss. Ass. am Psychol. Inst. der Univ. Düsseldorf (Lehrstuhl IV) (Direktor: Prof. Dr. Krauth)
1.1.1977 - 30.4.1979	Wiss. Hilfskraft am Inst. f. Med. Statist. u. Biomath. der Univ. Düsseldorf (Direktor: Prof. Dr. Jesdinsky)
1.5.1979 - 30.11.1979	Verw. Wiss. Ass. am Inst. f. Med. Dokument. u. Statist. der Univ. Köln (Direktor: Prof. Dr. Weidtman)
seit dem 1.12.1979	Wiss. Ass. an demselben Institut

Druck: Hundt Druck GmbH, Zülpicher Str. 220, 5000 Köln 41, Tel. (0221) 44 41 52